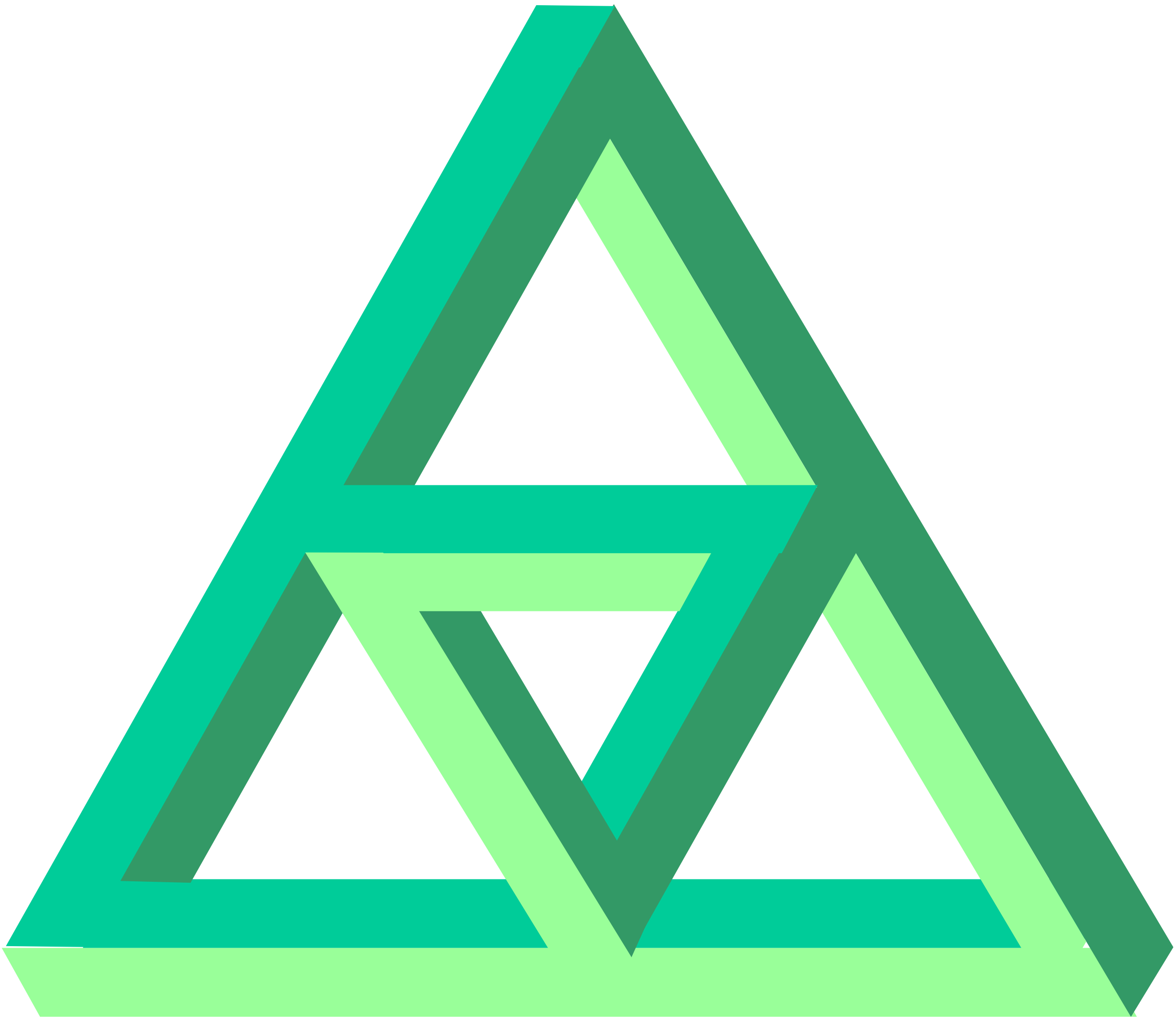
Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 09/2025 (September 2025) 24. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Um der noch laufenden Schulrunde der 65. Mathematik-Olympiade nicht vorzugreifen, setzen wir das Thema „Zyklische Aufgabenformulierungen“ und diskutieren weitere Aufgaben. Obwohl hierbei die (allgemein bekannten) Mittelungleichungen und davon abgeleitete Ungleichungen (wir verweisen in der Rubrik „Bekannte Sätze“ auf die CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung) als Lösungsansatz hilfreich sein können, erscheinen die Strategien dennoch oft als trickreich.

Im Zusammenhang mit der Aufgabe **KZM-1.5B** aus der ersten Serie des diesjährigen Korrespondenzzirkels Mathematik untersuchen wir Fragestellungen zur Fakultät. Insbesondere erläutern wir Möglichkeiten, die Anzahl der Stellen eines solchen Produktes zu ermitteln.

Im historischen Rückblick verwenden wir ein Übungsbuch zur Arithmetik und Algebra aus dem Jahr 1906, um die Potenzgesetze in Aufgaben anzuwenden. Diese Anforderungen an damalige Realschüler sind auch heute noch aktuell, so dass diese Sammlung von 150 Aufgaben weiterhin hilfreich ist

Wir berichten ausführlich von der **19. Mitteleuropäischen Mathematik-Olympiade**, die Ende August Chemnitz zur „Europäischen Hauptstadt für Mathematik“ aufstiegen ließ (so Medien-Überschriften). Wir freuen uns nicht nur über eine gelungene Veranstaltung in Sachsen, sondern auch über das erfolgreiche Abschneiden des deutschen Teams!

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 34.2 – Zyklische Aufgabenformulierungen

Aufgabe 34.11. Beweise für alle natürliche Zahlen $n > 3$ und alle reellen Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ mit $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = 1$ die Ungleichung

$$\frac{1}{1 + x_1 + x_1 \cdot x_2} + \frac{1}{1 + x_2 + x_2 \cdot x_3} + \cdots + \frac{1}{1 + x_n + x_n \cdot x_1} > 1$$

Lösungshinweise: Wir substituieren $x_1 = \frac{a_2}{a_1}, x_2 = \frac{a_3}{a_2}, \dots, x_n = \frac{a_1}{a_n}$ mit positiven Zahlen a_i $(i = 1, \dots, n)$. Dies ist immer möglich: Es genügt $a_1 = 1$ festzulegen. Dann erhalten wir $a_2 = x_1, a_3 = x_1 \cdot x_2, \dots, a_n = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1}$. Laut Voraussetzung ist dann $x_n = \frac{1}{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1}} = \frac{a_1}{a_n}$. Mit dieser Substitution nimmt die Ungleichung wegen

$$\frac{1}{1 + x_k + x_k \cdot x_{k+1}} = \frac{1}{1 + \frac{a_{k+1}}{a_k} + \frac{a_{k+1}}{a_k} \cdot \frac{a_{k+2}}{a_{k+1}}} = \frac{a_k}{a_k + a_{k+1} + a_{k+2}}$$

die folgende Form an

$$X = \frac{a_1}{a_1 + a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_2 + a_3 + a_4} + \cdots + \frac{a_n}{a_n + a_1 + a_2} > 1 \, .$$

Da aber für alle k $(k = 1, \dots, n-2)$ stets $a_k + a_{k+1} + a_{k+2} < \sum_{i=1}^{n} a_i$ gilt, können wir weiter abschätzen:

$$X > \frac{a_1}{\sum_{i=1}^{n} a_i} + \frac{a_2}{\sum_{i=1}^{n} a_i} + \cdots + \frac{a_n}{\sum_{i=1}^{n} a_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i} = 1 \, .$$

❑

Aufgabe 34.12. Finde den maximalen Wert des Ausdrucks

$$x_1^2 \cdot x_2 + x_2^2 \cdot x_3 + \cdots + x_n^2 \cdot x_1 \, ,$$

für nichtnegative reelle Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_n$ mit $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$ $(n > 2)$.

Lösungshinweise: Diese Aufgabe erinnert an die Aufgaben **MO640946/MO641046**. Wir versuchen deshalb einen ähnlichen Ansatz zur Lösungsdarstellung.

Für die Festlegungen $x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = \frac{1}{3}, x_3 = \cdots = x_n = 0$ finden wir, dass das Maximum mindestens $\frac{4}{27}$ beträgt. Wir vermuten, damit bereits den maximalen Wert gefunden zu haben. Wir untersuchen zunächst den Fall $n = 3$ und wollen den Spezialfall beweisen: Für $a + b + c = 1$ gilt $a^2 b + b^2 c + c^2 a \leq \frac{4}{27}$.

Wir können die Bezeichnungen aufgrund der zyklischen Aufgabenstellung stets so wählen, dass a ein größter Wert der drei Variablen ist. Damit gelten die Abschätzungen $abc \geq b^2 c$ und $a^2 c \geq ac^2$. In diesem Fall erhalten wir

$$\left(a+\frac{c}{2}\right)^2\cdot\left(b+\frac{c}{2}\right)=a^2b+abc+b\frac{c^2}{4}+\frac{a^2c}{2}+\frac{ac^2}{2}+\frac{c^3}{8}\geq a^2b+b^2c+c^2a\,.$$

Mit der (trickreichen) Zerlegung

$$\frac{a+\frac{c}{2}}{2}+\frac{a+\frac{c}{2}}{2}+b+\frac{c}{2}=a+b+c=1$$

können wir die Ungleichung zwischen geometrischen und arithmetischen Mittel anwenden und erhalten

$$\sqrt[3]{\frac{1}{4}\cdot\left(a+\frac{c}{2}\right)^2\cdot\left(b+\frac{c}{2}\right)}=\sqrt[3]{\left(\frac{a+\frac{c}{2}}{2}\right)^2\cdot\left(b+\frac{c}{2}\right)}\leq\frac{a+b+c}{3}=\frac{1}{3}\,.$$

Schätzen wir in der linken Seite dieser Ungleichung das Produkt durch den zu untersuchenden Term ab, finden wir

$$\sqrt[3]{\frac{1}{4}\cdot(a^2b+b^2c+c^2a)}\leq\sqrt[3]{\frac{1}{4}\cdot\left(a+\frac{c}{2}\right)^2\cdot\left(b+\frac{c}{2}\right)}\leq\frac{1}{3}\,,$$

also

$$a^2b+b^2c+c^2a\leq 4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{4}{27}\,.$$

In Anlehnung an die Beweismethode der vollständigen Induktion nehmen wir an, dass für n Variablen das Maximum $\frac{4}{27}$ beträgt. Nun betrachten wir die Summe mit $n+1$ Variablen, also $x_1^2x_2+x_2^2x_3+\cdots+x_{n+1}^2x_1$.

Da die Variablen zyklisch in der Aufgabenstellung vorkommen, können wir annehmen, dass x_2 den kleinsten Wert aller Variablen hat (andernfalls können wir die Variablen zyklisch so umbenennen). Dann gilt $x_1^2x_2\leq x_1^2x_3$. Außerdem ist für nichtnegative Variablen stets $2x_1x_2x_3\geq 0$ und $x_{n+1}^2x_2\geq 0$. Wir können deshalb den zu untersuchenden Term wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}x_1^2x_2+x_2^2x_3+\cdots+x_{n+1}^2x_1&\leq x_1^2x_3+2x_1x_2x_3+x_2^2x_3+\cdots+x_{n+1}^2x_1+x_{n+1}^2x_2\\&=(x_1+x_2)^2x_3+\cdots+x_{n+1}^2(x_1+x_2)\,.\end{aligned}$$

Damit ist das Maximum des Terms mit den $n+1$ nichtnegativen Variablen $x_1,x_2,\dots,x_n,x_{n+1}$ (mit Summe gleich 1) nicht größer als das Maximum des Terms mit den n (ebenfalls nichtnegativen) Variablen $(x_1+x_2),x_3\dots,x_n,x_{n+1}$ (ebenso mit Summe gleich 1). Damit ist der Beweis vollständig, denn wir können für jedes n auf diese Weise das vermutete Maximum bestätigen, das für die Festsetzungen $x_1=\frac{2}{3},x_2=\frac{1}{3},x_3=\cdots=x_n=0$ wegen

$$x_1^2x_2 + x_2^2x_3 + \cdots + x_n^2x_1 = x_1^2x_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$$

auch angenommen werden kann. ❑

Aufgabe 34.13. Seien $x_1, x_2, \dots, x_n$ positive ganze Zahlen ($n > 1$). Man beweise, dass mindestens ein Wert der Form $\sqrt[x_1]{x_2}, \sqrt[x_2]{x_3}, \dots, \sqrt[x_{n-1}]{x_n}, \sqrt[x_n]{x_1}$ kleiner oder gleich $\sqrt[3]{3}$ ist.

Lösungshinweise: Wir beweisen die Aussage indirekt und nehmen an, dass für alle Indizes i ($i = 1, \dots, n$) die Abschätzung $\sqrt[x_i]{x_{i+1}} > \sqrt[3]{3}$ gilt (wobei wir $x_{n+1} = x_1$ verstehen).

Wir verwenden die Ungleichung $\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[3]{3}$, gleichbedeutend zu $n \leq \sqrt[3]{3^n}$. Für $n = 1,2,3,4$ ist die Aussage offensichtlich richtig, was wir durch Berechnung der Werte $\sqrt[1]{1} = 1$, $\sqrt[2]{2} < 1.42$, $\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{4} = \sqrt[2]{2} < 1.42$ bestätigen (mit $\sqrt[3]{3} > 1.44$).

Gilt die Ungleichung nun für eine Zahl $k > 3$ $\left(\text{d. h. } k \leq \sqrt[3]{3^k}\right)$, so überzeugen wir uns (im Sinne der Methode der vollständigen Induktion), dass die Ungleichung auch für die Zahl $k + 1$ $\left(\text{d. h. } k + 1 \leq \sqrt[3]{3^{k+1}}\right)$richtig ist:

$$1 + \frac{1}{k} \leq 1 + \frac{1}{4} < \sqrt[3]{3} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[3]{3^{k+1}} = \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3^k} \geq \left(1 + \frac{1}{k}\right) \cdot k = k + 1$$

Aus unserer Voraussetzung und aus dieser Beziehung folgt

$$\sqrt[x_i]{x_{i+1}} > \sqrt[3]{3} \geq \sqrt[x_{i+1}]{x_{i+1}}, \quad \text{also} \quad x_{i+1} > x_i$$

Setzen wir dies in die zyklische Formulierung ein, erhalten wir mit $x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_1$, das heißt wir erhalten einen Widerspruch. Unsere Annahme kann also nicht gelten. Damit haben wir die Behauptung bewiesen. ❑

Aufgabe 34.14. Man beweise: Wenn *a, b, c, d* positive reelle Zahlen sind, so gilt

$$\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} + \frac{d-a}{a+b} \geq 0\,.$$

Lösungshinweise: Wir addieren auf beiden Seiten dieser Ungleichung den Ausdruck

$$\frac{b+c}{b+c} + \frac{c+d}{c+d} + \frac{d+a}{d+a} + \frac{a+b}{a+b} = 4$$

und können dann die Brüche mit dem gleichen Nenner zusammenfassen zu

$$\frac{a+c}{b+c} + \frac{b+d}{c+d} + \frac{c+a}{d+a} + \frac{d+b}{a+b} \geq 4\,.$$

Wir klammern die gemeinsamen Zähler aus und erhalten

$$(a+c)\cdot\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{d+a}\right)+(b+d)\cdot\left(\frac{1}{c+d}+\frac{1}{a+b}\right)\geq 4\,.$$

Mithilfe der allgemein bekannten Ungleichung $x+\frac{1}{x}\geq 2$ für alle positiven reellen Zahlen x gilt auch

$$1+\frac{d+a}{b+c}+1+\frac{b+c}{d+a}\geq 4 \quad ; \quad 1+\frac{a+b}{c+d}+1+\frac{c+d}{a+b}\geq 4,$$

äquivalent zu

$$\frac{(b+c)+(d+a)}{b+c}+\frac{(d+a)+(b+c)}{d+a}\geq 4 \;\Rightarrow\; \frac{1}{b+c}+\frac{1}{d+a}\geq\frac{4}{a+b+c+d}$$

bzw.

$$\frac{(c+d)+(a+b)}{c+d}+\frac{(a+d)+(c+d)}{d+a}\geq 4 \;\Rightarrow\; \frac{1}{c+d}+\frac{1}{a+b}\geq\frac{4}{a+b+c+d}\,.$$

Wir setzen diese Ungleichungen das oben erhaltene Zwischenergebnis ein:

$$\begin{aligned}&\frac{a-b}{b+c}+\frac{b-c}{c+d}+\frac{c-d}{d+a}+\frac{d-a}{a+b}=\frac{a+c}{b+c}+\frac{b+d}{c+d}+\frac{c+a}{d+a}+\frac{d+b}{a+b}-4=\\&=(a+c)\cdot\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{d+a}\right)+(b+d)\cdot\left(\frac{1}{c+d}+\frac{1}{a+b}\right)-4=\\&\geq\frac{4\cdot(a+c)+4\cdot(b+d)}{a+b+c+d}-4=0\,.\end{aligned}$$

❑

Aufgabe 34.15. Es seien $x_1, x_2, \dots, x_n$ paarweise disjunkte ganze Zahlen ($n>0$). Man beweise die Ungleichung

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\geq x_1\cdot x_2+x_2\cdot x_3+\cdots+x_n\cdot x_1+2\cdot n-3\,.$$

Lösungshinweise: Wir bilden vollständige Quadrate und schreiben die Ungleichung als

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i+1})^2\geq 2\cdot(2\cdot n-3)$$

(wobei $x_{n+1}=x_1$ zu verstehen ist). Wir bezeichnen den Index, der das Minimum der Variablen realisiert, mit m, und den Index, der das Maximum der Variablen realisiert, mit M. Aufgrund der zyklischen Aufgabenformulierungen können wir die Variablen o.B.d.A. zyklisch so umbenennen, dass $m<M$ gilt. Dann können wir die Summen S_1, S_2 wie folgt definieren:

$$\begin{aligned}S_1&=(x_m-x_{m+1})^2+\cdots+(x_{M-1}-x_M)^2,\\S_2&=(x_M-x_{M+1})^2+\cdots+(x_n-x_1)^2+\cdots+(x_{m-1}-x_m)^2.\end{aligned}$$

Verwenden wir nun die Ungleichung zwischen arithmetischen und quadratischen Mittel als einfache Folgerung aus der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung[3], erhalten wir die Abschätzungen

$$S_1 \geq \frac{(x_M - x_m)^2}{M - m} \quad ; \quad S_2 \geq \frac{(x_M - x_m)^2}{n - (M - m)}$$

Deshalb gilt

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i+1})^2 = S_1 + S_2 \geq (x_M - x_m)^2 \cdot \left(\frac{1}{M - m} + \frac{1}{n - (M - m)}\right)$$

Da die Variablen $x_1, x_2, \dots, x_n$ paarweise disjunkte ganze Zahlen sind, gilt $(x_M - x_m)^2 \geq (n-1)^2$, denn die kleinste Zahl und die größte Zahl müssen mindestens den Abstand $n - 1$ haben. Außerdem finden wir

$$\frac{1}{M - m} + \frac{1}{n - (M - m)} = \frac{n}{(M - m) \cdot \big(n - (M - m)\big)}.$$

Für reelle Zahlen x, y gilt stets für Nenner der Form $x \cdot (y - x) = x \cdot y - x^2$ die Abschätzung $\frac{y^2}{4} - \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 \leq \frac{y^2}{4}$, so dass mit $y = n$ der Nenner kleiner als $\frac{n^2}{4}$ ist. Somit gilt

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i+1})^2 \geq (n-1)^2 \cdot \frac{4}{n} = 4 \cdot n - 8 + \frac{4}{n} > 4 \cdot n - 8$$

Abschließend wenden wir an, dass das Quadrat einer Differenz ganzer Zahlen den gleichen Rest bei Division durch 2 lässt wie die Differenz selbst. D.h. aber auch, dass $\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i+1})^2$ den gleichen Rest wie $\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i+1})$ lässt, also eine gerade Zahl ist. Damit kann der Beweis beendet werden:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i+1})^2 \geq 4 \cdot n - 6$$

❑

Fakultät – der Umgang mit großen Zahlen [4]

Der sächsische Korrespondenzzirkel Mathematik[5] (KZM) ist mit der Serie 1 (Einsendetermin: 24.09.2925) in die neue Auflage 2025/26 gestartet. Da eine Anmeldung zum KZM mit der Einsendung der Lösungsvorschläge genügt, kann noch

[3] Siehe Beitrag „Bekannte Sätze der Mathematik“ am Ende des Heftes

[4] vgl. Gardner, M. Mathematische Hexereien. Verlag Ullstein GmbH Berlin 1990.

[5] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

direkt teilgenommen werden (wobei auch zu einem späteren Zeitpunkt ein Einstieg möglich ist). Die Teilnahme am KZM ist als Wettbewerbsvorbereitung besonders empfehlenswert. Anders als mit den „Mathematischen Kostproben", in denen der schnelle Blick auf die Lösung lockt und die Lösungsstrategien damit eher passiv studiert werden, ist die selbständige Lösungsfindung und -darstellung nachhaltiger. Alle Informationen und das aktuelle Aufgabenblatt sind auf der KZM-Webseite verfügbar.

In der **Aufgabe KZM-1.5B** sind Problemstellungen rund um die Fakultät[6] zu bearbeiten. Die Anzahl der Ziffern von $n!$ wächst mit zunehmenden n schnell an. Während 6! noch eine dreistellige Zahl ist, besitzt 10! bereits 7 Ziffern und 20! gar 19 Stellen. Dies war Inhalt der

Aufgabe MO351033. Die Zahl 20! ist das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis 20. Im Dezimalsystem ist diese Zahl 19-stellig. Jürgen hat den Rechnerausdruck

20! = 24329020*81766*****

erhalten. Darin sind die Ziffern an den Stellen * unleserlich. Kann er, wenn die anderen Ziffern korrekt sind, die fehlenden Ziffern ermitteln, ohne einen Rechner zu nutzen oder Multiplikationen mit zehn- oder mehrstelligen Zahlen auszuführen? Wenn das möglich ist, begründen Sie dies und geben Sie die fehlenden Ziffern an.

Zwei Jahre vorher wurden bereits ähnliche Problemstellungen mit gleichartigem Fragetext in der 4. Stufe gestellt:

Aufgabe MO330944. 22! = 11240007277**607680000
Aufgabe MO331044. 23! = 2585201673*8849*6640000

Lösungshinweise: In diesen beiden Aufgaben ist es ein nahe liegender Lösungsansatz, die fehlenden Ziffern anhand von Teilbarkeitsregeln zu ermitteln. Die Division durch 9 und durch 11 lieferen hierfür ausreichende Argumente, da sowohl 9 als auch 11 unter den Faktoren vorkommt. In der Aufgabe der 35. MO war zudem zunächst die Anzahl der Endnullen zu ermitteln. Dann verbleiben wiederum nur zwei Ziffern, die es zu finden gilt.

Bezeichnen wir die fehlenden Ziffern in 22! (von links) mit a und b, so muss wegen der Teilbarkeit durch 9 die Summe $58 + a + b$ ein Vielfaches von 9 sein. Außerdem muss wegen der Teilbarkeit durch 11 die alternierende Summe $-22 - a + b$ durch 11 teilbar sein. Aus letzterem folgen unmittelbar $a = b$ und deshalb aus der ersten Aussage $a = b = 7$.

Mit analoger Argumentation bezeichnen wir die fehlenden Ziffern in 23! Mit a und b und erhalten die Bedingungen, dass $84 + a + b$ durch 9 und $10 + a - b$ durch 11

[6] Für natürliche Zahlen $n > 0$ wird das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$ als n-Fakultät bezeichnet.

teilbar sein müssen. Aus letzterem folgen unmittelbar $a = b + 1$ und aus der ersten Aussage die Möglichkeiten $a + b = 6$ oder $a + b = 15$. Nur $a = 8$ und $b = 7$ erfüllen beider Teilbarkeitsaussagen.

In 20! wird die Anzahl der Nullen durch die Anzahl des Auftretens des Primfaktors 5 bestimmt (da der Primfaktor 2 häufiger als 5 auftritt). Unter den Faktoren bis 20 tragen also 5, 10, 15 und 20 eine Endnull bei, so dass 20! auf 4 Nullen endet. Somit verbleiben zwei unbekannte Ziffern in der Darstellung. Wir wenden dieselbe Strategie an: Wir bezeichnen die fehlenden Ziffern (von links) mit a und b und erkennen, dass die Quersumme $50 + a + b$ durch 9 teilbar und die alternierende Quersumme $-4 + a + b$ durch 11 teilbar sein müssen. Aus letzterem folgen unmittelbar $a + b = 4$ und aus der ersten Aussage die Möglichkeiten $a + b = 4$ oder $a + b = 13$. Nur $a = 0$ und $b = 4$ erfüllen beider Teilbarkeitsaussagen, da b keine weitere Null am Ende der Zahl sein darf. ❑

Wollen wir abschätzen, wie viele Stellen 1000! besitzt, so könnten wir zunächst so vorgehen: In 1000! trägt jeder Faktor, der kleiner als 1000 ist, höchstens 3 Stellen zu 1000! bei. Folglich ist die Abschätzung 1000! < 10^{3000} sicherlich richtig.

Eine Verbesserung der Abschätzung ist wie folgt möglich: Aus der bekannten Ungleichung des geometrischen und arithmetischen Mittels von n Zahlen und der Summenformel der ersten n natürlichen Zahlen wissen wir, dass auch folgende Abschätzung gilt:

$$\sqrt[1000]{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 1000} \leq \frac{1+2+\ldots+1000}{1000} = \frac{500 \cdot 1001}{1000} = 500{,}5\,.$$

Also ist

$$1000! < 501^{1000} < (2^9)^{1000} < (2^{13})^{693} < 10000^{693} = 10^{2772}.$$

Dabei beinhalten die mittleren Abschätzungen lediglich Umformungen, die eine Berechnung ohne Taschenrechner erleichtern, denn die Zweierpotenzen 501 < 512 = 2^9 und $2^{13} = 8 \cdot 2^{10} = 8 \cdot 1024 < 10000$ sind bekannt (bzw. leicht ermittelbar). Mit Taschenrechner geht es auch so:

$$1000! < 501^{1000} < (10^{2,7})^{1000} = 10^{2700}\,.$$

Die Güte der Abschätzung lässt sich nur schwer bewerten. Hilfreich ist da die STIRLINGsche Formel[7], die die Fakultät mit den beiden mathematischen Konstanten e und π in Verbindung bringt: Es gilt

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi \cdot n}\,.$$

Diese Abschätzung liefert praktikable Aussagen zur Stellenzahl:

[7] JAMES STIRLING, schottischer Mathematiker (1692 bis 1770)

$$lg(n!) \sim n \cdot lg\left(\frac{n}{e}\right) + 0{,}5 \cdot lg(2\pi \cdot n).$$

Für $n = 20$ finden wir auf diese Weise $lg(n!) \approx 18{,}38$. Der daraus resultierende Wert $n! \approx 2{,}39 \cdot 10^{18}$ stimmt recht gut mit dem wirklichen Wert überein. Verlassen wir uns (hier ohne weiteren Beweis) darauf, dass die Güte dieser Abschätzung auch bei großen n gilt, erhalten wir für $n = 1000$:

$$lg(1000!) \sim 2566{,}61$$

so dass 1000! insgesamt 2567 Ziffern umfassen könnte. Es kann bewiesen werden, dass der relative Fehler der STIRLINGschen Formel mit wachsender Zahl n kleiner wird, so dass die Formel eine verlässliche Abschätzung liefert. Für Werte über $n = 20$ beträgt der Fehler weniger als 0,5%.

19. Mitteleuropäische Mathematik-Olympiade

Die Mitteleuropäische Mathematik-Olympiade (MeMO[8]) ist ein staatenübergreifender Mathematikwettbewerb, der 2007 erstmalig ausgerichtet wurde und an dem seit 2014 die zehn Länder Deutschland, Kroatien, Litauen, Polen, Österreich, Schweiz, Slowakei, Slowenien, Tschechien und Ungarn teilnehmen. Das Ausrichterland darf eine weitere Mannschaft ihrer Wahl einladen. Der Wettbewerb bietet Jugendlichen (in Deutschland im Allgemeinen aus der Jahrgangsstufen 10 und 11) eine zur Internationalen Mathematik-Olympiade (IMO) zusätzliche Möglichkeit, an internationalen Vergleichen teilzunehmen. Dabei wird jedoch die Doppel-Teilnahme an MeMO und IMO in einem Kalenderjahr per Reglement ausgeschlossen.

Jedes teilnehmende Land entsendet sechs Schüler zur MeMO. Es gibt sowohl einen Einzel- als auch einen Teamwettbewerb. Jeder Teilnehmende schreibt am ersten Wettkampftag eine fünfstündige Individualklausur. Am Folgetag steht die ebenfalls fünfstündige Teamklausur auf dem Programm. Die vier Aufgabenstellungen des Einzelwettbewerbs und die acht Probleme für die Teamentscheidung orientieren sich im Schwierigkeitsgrad am Niveau der IMO. Es sind je Aufgabe 8 Punkte möglich. Wie auch zur IMO wird die siebentägige Veranstaltung von einem reichhaltigen Exkursionsprogramm umrahmt.

Die Ausrichtung rotiert durch die zehn mitteleuropäischen Länder. In diesem Jahr wurde die MeMO deshalb turnusmäßig wieder nach Deutschland vergeben, nachdem bereits die 8. MeMO 2014 in Dresden ausgerichtet wurde[9]. Die für bundesweite Wettbewerbe zuständige Bildung & Begabung gGmbH Bonn hatte im November 2023 offiziell den Zuschlag nach Chemnitz gegeben – in Erinnerung an die erfolgreiche

[8] www.memo-official.org

[9] Dazwischen liegt 2020 coronabedingt eine virtuelle MeMO, die nur als Individualwettbewerb durchgeführt und keinem Gastgeberland zugeschrieben wurde.

Ausrichtung der Bundesrunde[10] der 58. MO 2019 und in Erwartung an die Kulturhauptstadt Europas. Die Schirmherrschaft übernahm der Bundespräsident FRANK-WALTER STEINMEIER.

Nun fand die 19. MeMO vom 25. bis 31. August 2025 in Chemnitz statt. Als Gastland war ein Team aus der Ukraine eingeladen (das außerhalb der Wertung teilnahm). Das lokale Organisationsteam wurde maßgeblich von Angehörigen der TU Chemnitz geprägt: Prof. Dr. DANIEL POTTS (vormals Dekan der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz), Dr. FRANK GÖRING (Ansprechpartner für die Zusammenarbeit Fakultät und Schule) und Dr. LAURA WEIDENSAGER (2014 Teilnehmerin an der MeMO) brachten ihre Erfahrungen zu mathematischen Veranstaltungen und deren Rahmenprogramm ein. Mit OStD STEPHAN LAMM (ehemals Schulleiter am Kepler-Gymnasium Chemnitz) und Vertretern der Stadtverwaltung Chemnitz, der Industrie- und Handelskammer Chemnitz und des Landesamtes für Schule und Bildung war das Org.-Team breit aufgestellt, um einen attraktiven Wettbewerb und einen erlebnisreichen Aufenthalt in Chemnitz zu gewährleisten.

Offizieller Empfang im Chemnitzer Rathaus durch den Oberbürgermeister SVEN SCHULZE am Eröffnungstag, Rundgang durch das Sächsische Museum für Archäologie in Chemnitz (smac), Abendveranstaltung im Sächsischen Industriemuseum Chemnitz, Exkursionen durch Chemnitzer Unternehmen und im Fraunhofer Institut für Werkzeugmaschinenbau und Umformtechnik (IWU) sowie ein Bowling-Wettstreit boten ein abwechslungsreiches Programm. Touristischer Höhepunkt war der Ausflug nach Freiberg mit Besuch der Mineralienschau „Terra Mineralia“, einer Einfahrt unter Tage und einem wissenschaftlichen Abstecher an die Bergakademie TU Freiberg. Immer dabei: Dr. LAURA WEIDENSAGER und 22 Guides, die den Gästen rund um die Uhr zur Seite standen und einen reibungslosen Ablauf gewährleisteten. In ihren gelben MeMO-Shirts waren sie immer präsent – und damit die engagierten Botschafter für Sachsen und Mathematik! Unter https://www.memo2025.de/Fotos.html sind zahlreiche Eindrücke im Bild festgehalten.

Für die internationale Jury unter Leitung von Prof. Dr. ELIAS WEGERT und Cheforganisator Dr. BERND MULANSKY waren die Wettbewerbstage voller Arbeit, beginnend mit der Aufgabenauswahl aus den Ländervorschlägen, Jury-Tätigkeit während der Wettbewerbe, vor allem natürlich Korrektur und Preisentscheidungen. Für die Klausuren, Korrekturen und Jury-Arbeit boten die Räume der TU Chemnitz beste Arbeitsbedingungen

Zur Abschlussveranstaltung (moderiert vom Dekan der Fakultät für Mathematik der TUC, Prof. Dr. ALOIS PICHLER) im Fraunhofer Institut IWU wurden an die 66 Teilnehmenden 8 Gold- (für 32 und 31 von 32 möglichen Punkten), 10 Silber- (für 28 bis 24 Punkte) und 18 Bronze-Medaillen (für 18 bis 21 Punkte) vergeben. Zusätzlich

[10] https://www.mo2019.de/

erhielten 20 Teilnehmende, die es nicht auf einen Medaillenplatz schafften, aber bei mindestens einer Aufgabe die volle Punktzahl erreichten, eine ehrende Erwähnung.

Verwenden wir für eine inoffizielle Länderwertung im Individualwettbewerb den Modus der IMO, die Platzierung anhand der Summe der sechs Einzelleistungen festzulegen, erreichte Deutschland mit 131 von 192 möglichen Punkten den Platz 2 (2024: 114 Punkte/Platz 4; 2023: 112 Punkte/Platz 5; 2022: 104 Punkte/Platz 2) und behauptete damit erneut eine Spitzenposition.

Platz	2025	Punkte	Gold	Silber	Bronze	Ehrende Erwähnung
1	Polen	161	3	1	2	-
2	Deutschland	131	2	-	2	2
3	Ungarn	128	1	2	1	2
4	Slowakei	125	-	2	3	1
	Ukraine	125	2	1	-	2
5	Tschechien	115	-	2	2	1
6	Kroatien	105	-	-	4	2
7	Litauen	88	-	1	1	2
8	Österreich	86	-	1	1	2
9	Schweiz	80	-	-	1	2
10	Slowenien	79	-	-	1	4

Für die offizielle Länderwertung wird aber der Teamwettbewerb zugrunde gelegt, in dem insgesamt 64 Punkte erreicht werden können. Das deutsche Team kam hierbei auf Platz 2 und erreichte damit wie schon im Vorjahr ein hervorragendes Ergebnis (2024: 49 Punkte/Platz 2; 2023: 22 Punkte/Platz 7; 2022: 37 Punkte/Platz 6).

Platz	Team	Punkte
1	Ukraine	54
	Slowakei	46
2	Deutschland	45
3	Tschechien	42
	Polen	42
5	Ungarn	41
	Schweiz	41
7	Litauen	34
8	Österreich	25
9	Slowenien	17
10	Kroatien	13

Leider hatten es sächsische Jugendliche nicht ins deutsche Team geschafft.

Aufgaben des Individual-Wettbewerbes.

Aufgabe I–1 (5.5/6.6/6.5[11])**.** Sei $\mathbb{R}_{>0}$ die Menge der positiven reellen Zahlen. Sei $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ eine Funktion, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt: $yf^{2025}(x) \;\geq\; xf(y)$.

Man beweise: Es existiert eine positive ganze Zahl n_0, so dass für alle positiven ganzen Zahlen $n \geq n_0$ und alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt: $f^n(x) \;\geq\; x$.

Bemerkung. Dabei bezeichnet f^n die n-fache Anwendung von f, d. h. $f^n(x) = \underbrace{f(f(f \dots (f}_{n-mal}(x) \dots))$.

Aufgabe I–2 (6.5/7.2/7.0). Auf einem unendlich großen Quadratgitter, von dem einige Felder rot gefärbt sind, sei ein *Roter Turm* eine Figur, die sich in einem Zug um eine beliebige Anzahl an Feldern parallel zu einer der Gitterachsen (vertikal oder horizontal) bewegen kann, wobei sie während des gesamten Zuges auf roten Feldern bleiben muss.

Ausgehend von einem ungefärbten unendlich großen Quadratgitter führt Alice den folgenden Prozess durch: Zunächst färbt sie höchstens 2025 Felder rot. Anschließend platziert sie einige Rote Türme auf paarweise verschiedenen roten Feldern, so dass folgende zwei Regeln erfüllt sind:

- Kein Roter Turm kann einen anderen Roten Turm in einem Zug erreichen.
- Jeder Rote Turm kann jeden anderen Roten Turm in zwei Zügen erreichen.

Man bestimme die größtmögliche Anzahl an Roten Türmen, die Alice in diesem Prozess platzieren kann.

Aufgabe I–3 (3.1/4.5/4.8). Sei ΔABC ein Dreieck. Sein Inkreis ω berühre die Seiten BC, CA und AB in den Punkten D, E bzw. F. Seien P und Q Punkte auf der Geraden BC, die jeweils von D verschieden sind und $|\overline{PB}| = |\overline{BD}|$ bzw. $|\overline{QC}| = |\overline{CD}|$ erfüllen.

Man beweise, dass sich die Umkreise der Dreiecke ΔPCE und ΔQBF und der Kreis ω in einem gemeinsamen Punkt treffen.

Aufgabe I–4 (3.4/5.3/3.5)**.** Eine Teilmenge S der ganzen Zahlen heiße *sächsisch*, wenn für je drei paarweise verschiedene Elemente $a, b, c \in S$ die Zahl $ab + c$ eine Quadratzahl ist.

Man zeige, dass jede sächsische Menge endlich ist. Man bestimme die größtmögliche Anzahl von Elementen, die eine sächsische Menge haben kann.

Aufgaben des Team-Wettbewerbes Es sind alle 8 Aufgaben zu bearbeiten. Die sechsköpfigen Teams können frei entscheiden, wer für welche Aufgabe

[11] durchschnittlich erreichte Punktzahle aller 66 Teilnehmenden/der 36 Medaillengewinner/des deutschen Teams von 8 möglichen Punkten

verantwortlich ist. Auch gemeinsame Bearbeitung von Aufgaben und Beratung untereinander darüber ist zugelassen.

Aufgabe T–1 (5.2[12]). Bob hat n Münzen mit ganzzahligen Werten $c_1 \geq c_2 \geq \cdots \geq c_n > 0$. Er steht vor einem Süßigkeitenautomaten, der n Schokoladenriegel mit positiven ganzzahligen Preisen $b_1, b_2, \ldots, b_n$ verkauft. Bob bemerkt, dass für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt:

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_i \geq c_i + c_2 + \cdots + c_i.$$

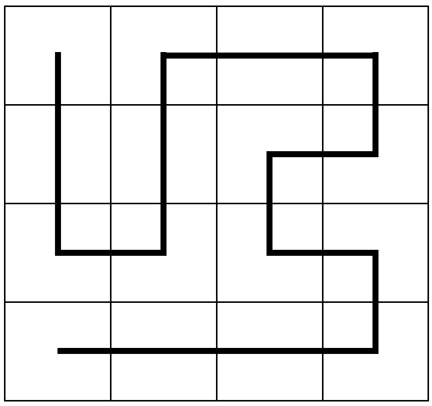
Außerdem stimmt der Gesamtwert von Bobs Münzen mit der Summe der Preise aller Schokoladenriegel überein. Die Schokoladenriegel können in jeder beliebigen Reihenfolge gekauft werden. Um den i-ten Schokoladenriegel zu kaufen, muss Bob Münzen mit einem Gesamtwert von mindestens b_i einwerfen. Allerdings gibt der Automat kein Wechselgeld zurück.

Man beweise, dass Bob mindestens die Hälfte aller Schokoladenriegel kaufen kann.

Aufgabe T–2 (3.0). Sei $\mathbb{R}_{>0}$ die Menge der positiven reellen Zahlen. Man bestimme alle Funktionen $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ mit folgenden zwei Eigenschaften:

- Für alle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt $f(xy) + f(x) = f(y)f(xf(y)) + f(x)f(y)$.
- Es gibt höchstens eine Zahl $a \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $f(a) = 1$.

Aufgabe T–3 (7.1)**.** Eine *Schlange* in einem $n \times n$-Quadratgitter ist ein Pfad, der aus Strecken zwischen Mittelpunkten benachbarter Felder zusammengesetzt ist, durch die Mittelpunkte aller n^2 Felder verläuft und jedes Feld genau einmal betritt. Dabei heißen zwei Felder benachbart, wenn sie eine gemeinsame Seite haben. Man beachte, dass alle Stücke der Schlange parallel zu Gitterachsen sind. Die Abbildung zeigt ein Beispiel einer Schlange in einem 4×4-Quadratgitter. Diese Schlange hat neun 90°-Winkel.



Man betrachte nun eine Schlange durch die 2025 Felder eines 45 × 45-Quadratgitters. Was ist die größtmögliche Anzahl an 90°-Winkeln, die eine solche Schlange haben kann?

Aufgabe T–4 (1.7)**.** Sei n eine positive ganze Zahl. In der Provinz Lappland gibt es $100 \cdot n$ Städte, von denen je zwei durch eine direkte Straße verbunden sind. Auf jeder dieser Straßen steht eine Mautstation, die einen positiven Geldbetrag an Maut einnimmt. Für jede Straße werden die Einnahmen der Maut zu gleichen Teilen

[12] durchschnittlich erreichte Punktzahle aller 11 Teams von 8 möglichen Punkten

zwischen den beiden Städten an den Enden der Straße aufgeteilt (d. h. beide Städte erhalten jeweils die Hälfte der Einnahmen). Die Gesamteinnahmen einer Stadt errechnen sich aus der Summe der Einnahmen, die die Stadt von den Mautstationen der $100 \cdot n - 1$ anliegenden Straßen erhält.

Gemäß einem neuen Gesetz sollen nun die Einnahmen einiger Mautstationen nicht mehr an die anliegenden Städte, sondern direkt an die Bundesregierung fließen. Der Gouverneur von Lappland darf diese Mautstationen auswählen. Die Bürgermeister der Städte fordern, dass für jede Stadt die Summe der Einnahmen, die sie nach der Änderung aus den verbleibenden Mautstationen noch erhält, mindestens 99% der früheren Gesamteinnahmen beträgt.

Man bestimme, in Abhängigkeit von n, die größte positive ganze Zahl k, sodass der Gouverneur immer k Mautstationen auswählen kann, deren Einnahmen zukünftig an die Bundesregierung fließen, und dabei die Forderung der Bürgermeister erfüllt wird.

Aufgabe T–5 (6.5). Sei ΔABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $|\overline{AB}| < |\overline{AC}|$. Sei D der Fußpunkt des Lotes von A auf BC. Sei E der Punkt, für den $ABEC$ ein Parallelogramm ist. Sei M ein Punkt im Inneren des Dreiecks ΔABC, für den $|\overline{MB}| = |\overline{MC}|$ gilt. Sei F der Punkt, den man erhält, wenn man D an der Tangente an den Umkreis des Dreiecks ΔADM durch M spiegelt.

Man beweise, dass $|\overline{AF}| = |\overline{DE}|$.

Aufgabe T–6 (4.6)**.** Sei ΔABC ein spitzwinkliges Dreieck mit einem inneren Punkt D, für den $|\measuredangle BDC| = 180° - |\measuredangle BAC|$ gilt. Die Geraden BD und AC schneiden einander im Punkt E, und die Geraden CD und AB schneiden einander im Punkt F. Die Punkte $P \neq E$ und $Q \neq F$ liegen auf der Geraden EF und erfüllen $|\overline{BP}| = |\overline{BE}|$ bzw. $|\overline{CQ}| = |\overline{CF}|$. Angenommen, die Strecken $\overline{AP}$ und $\overline{AQ}$ schneiden den Umkreis ω des Dreiecks ΔABC erneut in den Punkten $R \neq A$ bzw. $S \neq A$.

Man beweise, dass die Geraden RF und SE einander auf ω schneiden.

Aufgabe T–7 (7.0)**.** Sei n eine positive ganze Zahl, sodass die *Summe* der positiven Teiler von $n^2 + n + 1$ durch 3 teilbar ist.

Man beweise: Die Menge der positiven Teiler von $n^2 + n + 1$ kann so in drei Mengen partitioniert werden, dass für jede der drei Mengen das *Produkt* ihrer Elemente dasselbe ist.

Aufgabe T–8 (1.2)**.** Man entscheide, ob folgende Aussage für jedes Polynom P mit Grad mindestens 2 und nichtnegativen ganzzahligen Koeffizienten gilt:

Es existiert eine positive ganze Zahl m, sodass für unendlich viele positive ganze Zahlen *n* die Zahl $P^n(m)$ mehr als n paarweise verschiedene positive Teiler besitzt.

Bemerkung. Dabei bezeichnet P^n die $n-$fache Anwendung von P, d. h. $P^n(x) = \underbrace{P(P(\dots P}_{n-mal}(x)\dots))$.

Hinweis: Man versuche, für einige dieser Aufgaben die Probleme mit speziellen Fällen zu veranschaulichen oder Lösungsansätze mit kleinen Zahlen für n zu finden.

Die 20. MeMO wird Ende August 2026 in Slowenien stattfinden.

In alten Mathe-Büchern geblättert

Im Lehrbuch

Dr. E. Bardeys
Arithmetische Aufgaben
nebst Lehrbuch der Arithmetik

vorzugsweise für
Realschulen, höhere Bürgerschulen und verwandte Anstalten

Siebente Auflage
Druck und Verlag von B.G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1906

werden Arithmetik (von den Grundrechenarten bis zu Logarithmen) und Algebra (Bestimmungsgleichungen ersten und zweiten Grades mit einer oder mehreren Unbekannten) behandelt. Nach jeweils kurzen theoretischen Einführungen folgen zahlreiche Übungsaufgaben. Man versuche, die zitierte kleine Auswahl zu bearbeiten, um die eigenen mathematischen Fertigkeiten zu prüfen. Es wird erwartet, dass Jugendliche aktuell derartige Aufgaben ohne Schwierigkeiten lösen können.

Erster Teil. Allgemeine Arithmetik.

X. Potenzen mit ganzen positiven Exponenten.

A. Theorie

Unter der Potenz a^n **versteht man eine abkürzende Bezeichnung für ein Produkt auf** n **gleichen Faktoren** a.

$$a^3 = a \cdot a \cdot a \qquad a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}^{n} \qquad \text{(Def. der Potenz)}$$

Benennungen: a = **Basis**, n = **Exponent**
Das Aufsuchen des Wertes einer Potenz nennt man Potenzieren[13].

I. $\quad a^5 \cdot a^3 = a^8 \qquad a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad$ (Pot. I)

[13] In Barth, F., Federle, R., Haller, R. Algebra 10. Oldenbourg Schulbuchverlag GmbH, München (s. https://mathematikalpha.de/mathematikbuecher-barth) lesen wir auf Seite 13: **Definition 13.1:** Für das Produkt $a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ aus n gleichen Faktoren a schreibt man kurz a^n, gesprochen „a hoch n“, und nennt es n-te Potenzt von a, kurz. Man sagt: a wird mit n potenziert. a heißt Grundzahl oder Basis, n heißt Hochzahl oder Exponent.

Beweis: $a^5 \cdot a^3 = \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}^{5} \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot a}^{3} = a^8$ (n. Def. der Potenz)

$a^m \cdot a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}^{m} \cdot \overbrace{a \cdot a \cdots a}^{n} = a^{m+n}$ (n. Def. der Potenz)

Satz I: Potenzen mit gleichen Basen werden multipliziert, indem man die gemeinschaftliche Basis mit der Summe der Exponenten potenziert.

II. $$\left\{\begin{matrix} \frac{a^8}{a^5} = a^3 & \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} & \text{für} \quad m > n \\ \frac{a^5}{a^8} = \frac{1}{a^3} & \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{n-m} & \text{für} \quad m < n \end{matrix}\right\}$$ (Pot. II)

Beweis:

$$\frac{a^8}{a^5} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = a^3$$ (n. Def. der Potenz und Brüche I)

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdots \overset{m}{\widehat{a}}}{a \cdot a \cdot a \cdots \overset{n}{\widehat{a}}} = a^{m-n}$$ (n. Def. der Potenz und Brüche I)

[… es folgen in ähnlicher Weise Beispiele, Verallgemeinerungen und Beweise zu folgenden Sätzen]

Satz II: Potenzen mit gleichen Basen werden dividiert, indem man die gemeinschaftliche Basis mit der Differenz der Exponenten potenziert.

Satz IIIa: Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliziert, indem man das Produkt der Basen mit dem gemeinschaftlichen Exponenten potenziert.

Satz IIIb: Ein Produkt wird mit einer Zahl potenziert, indem man jeden Faktor mit der Zahl potenziert.

Satz IVa: Potenzen mit gleichen Exponenten werden dividiert, indem man den Quotienten der Basen mit dem gemeinschaftlichen Exponenten potenziert.

Satz IVb: Ein Bruch wird mit einer Zahl potenziert, indem man Zähler und Nenner einzeln mit der Zahl potenziert.

Satz V: Eine Potenz wird mit einer Zahl multipliziert, indem man den Exponenten mit der Zahl multipliziert (und die Basis mit dem Produkte potenziert).

VI. Merke noch

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \quad \text{usw.}$$

B. Aufgaben (Auswahl) [14]

2. $3^5 - 5^3$ … $2^6 - 8^2$ 4. $5 \cdot 2^7 - 2 \cdot 5^3$

5. *) $\left(\frac{3}{4}\right)^8$ … $\left(1\frac{1}{7}\right)^7$ 6. $0{,}938^4$ … $1{,}2037^5$

---

[14] Eine Kopie aller 150 Aufgaben ist als pdf-Kopie erhältlich.

*) Wo es nicht anders vermerkt ist, soll die Rechnung bis auf 5 Dezimalstellen aufgeführt werden. Um der 5. Stelle sicher zu sein, muß man die 6. Stelle noch mitrechnen.

7.	$\frac{7^3-3^4}{3^5-5^3}$ … $\frac{8^4-4^6}{9^7-7^9}$	11.	$(x-y)^3-(y-x)^3$
23.	$(+x)^3\cdot(-x)^6$	30.	$2a^2\cdot 3b^3\cdot 5c^5\cdot\frac{2}{5}ab^2c$
31.	$\frac{1}{2}ab^2\cdot\frac{3}{4}ax^3\cdot 5\frac{1}{3}a^{n-1}x^{n-3}$	49.	$\frac{a^{n+1}}{a}$ … $\frac{bx}{b^{2x+1}}$
52.	$\frac{a^5b^7}{a^2b^4}$	58.	$\frac{24a^2bx^{n+1}}{25c^3y^2z^{n-1}}:\frac{36ab^3x^{n-1}}{35c^2y^4z^{n-2}}$
66.	$\frac{15^3}{3^3}$ … $\frac{2000000^3}{500000^3}$	73.	$\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^4$
80.	$\left(\frac{a}{x^7}+\frac{b}{x^5}+\frac{c}{x^3}\right)\cdot x^7$	87.	$(9a^5b^2-12a^3b^5):3a^4b^4$
107.	$(2+x)^5+(2-x)^5$	138.	$\frac{x^4-y^4}{x-y}$
143.	$\frac{a^{x+1}-a^{x-1}}{a-1}$	150.	$(a^{4x}-a^4):(a^{x-1}+1)$

Bekannte Sätze der Mathematik

Wir betrachten positive Zahlen $x_1,\dots,x_n$ und $y_1,\dots,y_n$ $(n>0)$. Wir setzen $a_i=\frac{|x_i|}{\sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}}$ und $b_i=\frac{|y_i|}{\sqrt{\sum_{j=1}^n y_j^2}}$ für alle $i=1,2,\dots,n$. Dann gilt $\sum_{j=1}^n a_j^2=1$ und $\sum_{j=1}^n b_j^2=1$. Verwenden wir nun die Ungleichung vom geometrischen und arithmetischen Mittel, so erhalten wir die Ungleichung

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{|x_j|\cdot|y_j|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}}=\sum_{j=1}^{n}a_j\cdot b_j=\sum_{j=1}^{n}\sqrt{a_j^2\cdot b_j^2}\le\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{a_j^2+b_j^2}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\sum_{j=1}^{n}a_j^2+\frac{1}{2}\cdot\sum_{j=1}^{n}b_j^2=1$$

woraus die so genannte CAUCHY[16]-SCHWARZ[17]sche Ungleichung folgt:

$$\left(\sum_{j=1}^{n}x_j\cdot y_j\right)^2\le\left(\sum_{j=1}^{n}x_j^2\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}y_j^2\right)$$

Die CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung kann in der Lösungsdarstellung als Aussage mit einem festen Namen ohne Beweis angewandt werden. Es gibt viele Folgerungen dieser Ungleichung, deren Namensgebung aber möglicherweise nicht einheitlich geführt wird. Damit ist eine beweislose Anwendung ggf. kritisch.

[16] AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY (1789 – 1857)
[17] HERMANN AMANDUS SCHWARZ (1843 – 1921)

Beispiel I. Die Ungleichung zwischen arithmetischen und quadratischen Mittel kann als allgemein bekannt vorausgesetzt werden: Betrachten wir positive Zahlen $a_1, \dots, a_n$ $(n > 0)$, so lautet diese Ungleichung:

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

Diese Abschätzung resultiert unmittelbar aus der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung, wenn wir in ihr $b_1 = \ \dots = b_n = \frac{1}{n}$ setzen. Dann lautet die Ungleichung

$$\frac{1}{n^2} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \cdot \frac{1}{n}\right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)^2\right) = \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right)$$

woraus wir durch Radizieren beider Seiten die Behauptung bestätigen können.

Beispiel II. Betrachten wir positive Zahlen $a_1, \dots, a_n$ und $b_1, \dots, b_n$ $(n > 0)$, und setzen wir $x_i = \frac{a_i}{\sqrt{b_i}}$ und $y_i = \sqrt{b_i}$, so erhalten wir aus der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung die weniger bekannte ANDREESCU[18]-Ungleichung:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j^2}{b_j} \geq \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)^2}{\sum_{j=1}^{n} b_j},$$

denn es gilt

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{\sqrt{b_j}} \cdot \sqrt{b_j}\right)^2 \leq \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{a_j}{\sqrt{b_j}}\right)^2 \cdot \sum_{j=1}^{n} \left(\sqrt{b_j}\right)^2 = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j^2}{b_j} \cdot \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

woraus die gesuchte Ungleichung unmittelbar folgt.

Monatsaufgabe 09/2025[19]

Man löse die Aufgabe T-3 der 19. MeMO für eine selbstgewählte Zahl $n \geq 4$.

Bemerkung: Team-Wettbewerbe sind bei mathematischen Wettbewerben unüblich. Es ist dabei eine besondere Anforderung, im Team eine effiziente Arbeitsteilung zu finden. Dabei können im Bedarfsfall auch mehrere Teilnehmenden an einer Aufgabe arbeiten. Auf Vorschlag der Jury vergab die Stadt Chemnitz durch den Bürgermeister RALPH BURGHART (Dezernat 1, Personal, Finanzen und Bildung) einen Sonderpreis an das Team aus Litauen für besonderen Teamgeist bei Aufgabe T-3. In der Laudatio

[18] TITU ANDREESCU (1956 - …)

[19] Lösungseinsendungen an bino@hrz.tu-chemnitz.de sind bis 30.09.2025 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

wurde diese Auszeichnung damit begründet, dass zur Angabe des gesuchten Maximums neben dessen zahlenmäßige Angabe auch ein Existenzbeweis für das gefundene Maximum und der Nachweis, dass es keinen größeren Wert geben kann, erforderlich ist. Den Existenznachweis erbrachte das Team, indem sie ein Teammitglied „abstellte", die maximale Lösung zu zeichnen, also in ein 45 x 45-Quadratgitter die Schlange korrekt einzuzeichnen. Aufgrund des erforderlichen Zeitaufwandes für eine solche Zeichnung wäre dies im Individual-Wettbewerb kaum realisierbar, im Team aber hervorragend gelöst Und mit voller Punktzahl belohnt)!

Termine

65. Mathematik-Olympiade, Runde 1, zum Schuljahresbeginn (August/September 2025) https://www.mathematik-olympiaden.de/moev/index.php/aufgaben

Spotlight Mathe – Einblicke in en Bundeswettbewerb Mathematik (online-Seminar), 17. September 2025, 17:30 bis 18:30 Uhr, Veranstalter: Bildung & Begabung gGmbH Bonn. Anmeldung: https://secure.bildung-und-begabung.de/bwmw/?event=10210

Spotlight Mathe – Einblicke in die Mathematik-Olympiade (online-Seminar), 18. September 2025, 17:30 bis 18:30 Uhr, Veranstalter: Bildung & Begabung gGmbH Bonn. Anmeldung: https://secure.bildung-und-begabung.de/bwmw/?event=10211

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2025/26)

Ausgabe[20]	Nr.	Thema	Aufgabe
09/2025	Thema 33.2	Zyklische Aufgabenformulierungen	
08/2025	Thema 33.1	Zyklische Aufgabenformulierungen	MO640946 MO641046
08/2025	Thema 31.3	Lösungsstrategien im Koordinatensystem	MO641043
08/2025	Thema 25.3	Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	MO640942 MO641042

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz" e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[20] Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (bino@hrz.tu-chemnitz.de) oder unter https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben erhältlich.