Aufgaben Serie 7 (2019/20)

(Einsendungen bis 23. Juni 2020 an Dr. Norman Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz oder norman.bitterlich@t-online.de[1])

Aufgabe 7-1.
Gibt es außer der Zahl 9 noch weitere Quadratzahlen unter den Zahlen, die nur mit der Ziffer 9 geschrieben werden, also unter den Zahlen 9, 99, 999, 9999, ...?

(5 Punkte)

Aufgabe 7-2.
In einem ebenen Dreieck seien zwei der drei Seitenhalbierenden gegeben. Dadurch ist das Dreieck in drei Teildreiecke und ein Viereck zerlegt.

Welchen Anteil an der Fläche des Gesamtdreiecks hat die Viereckfläche?

(5 Punkte)

Aufgabe 7-3.
Auf einer Party mit 21 Personen kennt jede Person höchstens vier andere. Man zeige, dass es auf dieser Party mindestens fünf Menschen gibt, die sich gegenseitig nicht kennen.

(Hinweis: Wenn Person A die Person B kennt, dann kennt auch B die Person A.)

(6 Punkte)

Aufgabe 7-4.
Fünf Kreisscheiben mit Radius 1 seien so angeordnet, dass ihre Mittelpunkte die Ecken eines regelmäßigen Fünfecks bilden und ihre Kreislinien alle durch den Mittelpunkt des Fünfecks gehen.

Man berechne den Radius der größten Kreisscheibe, die von den fünf Kreisscheiben bedeckt wird!

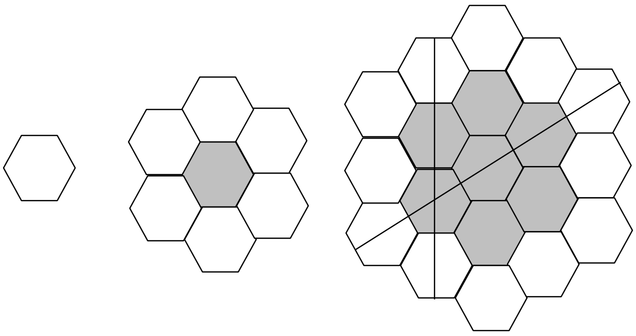
(6 Punkte)

(Hinweis: Von den folgenden beiden Aufgaben wird lediglich die Lösung mit der höheren erreichten Punktzahl in der Gesamtbewertung berücksichtigt. Werden jedoch beide Aufgaben bearbeitet und beträgt die erreichte Punktsumme mehr als 8, wird ein Zusatzpunkt vergeben, bei mehr als 12 Punkte, zwei Zusatzpunkte.)

Aufgabe 7-5A.
In Analogie zu Magischen Quadraten kann man Magische Sechsecke konstruieren: Um ein einzelnes regelmäßiges Sechseck (dies sei ein Sechseck 1. Ordnung) kann man einen Ring von sechs weiteren gleichgroßen regelmäßigen

[1] Die elektronische Zusendung wird nach Empfang mit „Re:“ bestätigt. Sollte diese Antwort innerhalb der folgenden Tage ausbleiben, empfiehlt es sich zur Vermeidung von Dateiverlusten nachzufragen.

Sechsecken legen, wobei die Figuren (wabenförmig) mit den Kanten aneinanderstoßen. Dieses Gebilde aus 7 Sechsecken wird Sechseck 2. Ordnung genannt. Ordnet man um dieses Gebilde in analoger Weise zwölf weitere Sechsecke, so erhält man ein Sechseck 3. Ordnung usw. (s. Skizze).



Besteht ein Sechseck n-ter Ordnung aus m Teilsechsecken und beschreibt man jedes dieser Teilsechsecke mit genau einer der natürlichen Zahlen 1 bis m, so wird das Sechseck magisch genannt, wenn die Summen auf allen „geraden Reihen" (zwei dieser Reihen sind im Sechseck 3. Ordnung durch die Strecken markiert) jeweils den gleichen Wert annehmen. Im Sechseck 2. Ordnung gibt es 9 solcher „geraden Reihen", im Sechseck 3. Ordnung 15.

(a) Man ermittle für jede Zahl n die Anzahl der Teilsechsecke, die für ein Sechseck n-ter Ordnung benötigt werden. (2 Punkte)

(b) Man zeige, dass es kein Magisches Sechseck 2. Ordnung geben kann, dass man also die Zahlen 1 bis 7 nicht so auf die Teilsechsecke verteilen kann, dass die Summen auf den 6 zweiteiligen Seitenreihen und den 3 dreiteiligen Mittelreihen jeweils gleich sind. (2 Punkte)

(c) Man untersuche, für welche $n > 2$ es keine Magischen Sechsecke n-ter Ordnung geben kann. (4 Punkte)

Aufgabe 7-5B.

Es sei $QP(n)$ das Querprodukt von n, also das Produkt aller Ziffern der Dezimalschreibweise der natürlichen Zahl n (in Analogie zur Quersumme). Gegeben sei die Gleichung

(1) $$n^2 - 16n + 42 = QP(n)$$

(a) Man ermittle die kleinste echt-zweistellige Zahl n, die die Gleichung (1) erfüllt. (2 Punkte)

(b) Man zeige, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt: $QP(n) \le n$. (2 Punkte)

(c) Man finde alle natürliche Zahlen n, die die Gleichung (1) erfüllen. (4 Punkte)