Aufgaben Serie 6 (2018/19)

Einsendungen bis 14. Mai 2019 an Dr. Norman Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz oder norman.bitterlich@t-online.de.

Aufgabe 6-1.
Gesucht sind alle vierstelligen natürlichen Zahlen n mit der folgenden Eigenschaft: Teilt man die Dezimaldarstellung von n durch einen „Schnitt“ in der Mitte, so dass zwei zweistellige natürlichen Zahlen a und b entstehen, so ist das Quadrat aus der Summe von a und b gleich n.

Aufgabe 6-2.
Jede konvexe Vierecksfläche wird durch ihre Diagonalen in vier Dreiecksflächen zerlegt. Man beweise, dass ein konvexes Viereck genau dann ein Parallelogramm ist, wenn je zwei beliebige der vier Dreiecke den gleichen Flächeninhalt haben.

Aufgabe 6-3.
Es sei $ABCD$ ein Rechteck, und es sei P ein Punkt, der nicht notwendig in der Ebene des Rechtecks zu liegen braucht. P habe vom Eckpunkt A den Abstand a, vom Punkt B den Abstand b und von C den Abstand c.

Man berechne den Abstand d des Punktes P vom Eckpunkt D und zeige dabei, dass zur Ermittlung dieses Abstandes d die Kenntnis der drei Abstände a, b, c ausreicht.

Aufgabe 6-4.
Man beweise folgenden Satz: Wenn in einer quadratischen Gleichung

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

die Koeffizienten a, b, c sämtlich ungerade Zahlen sind, dann hat diese Gleichung keine rationalen Lösungen.

Aufgabe 6-5A.
Ein Würfel mit der Kantenlänge 1 m werde durch einen ebenen Schnitt in zwei Teile zerlegt. Man betrachte im Folgenden die dabei entstehende Schnittfläche.

(a) Kann der Schnitt so erfolgen, dass die Schnittfläche ein Quadrat mit einem Flächeninhalt von mehr als 1,1 m² einschließt?

(b) Kann der Schnitt so erfolgen, dass die Schnittfläche ein regelmäßiges Sechseck ist?

(c) Für welche ungeraden Zahlen $n > 1$ gilt: Es gibt einen ebenen Schnitt derart, dass die Schnittfläche ein regelmäßiges n-Eck ist.

Aufgabe 6-5B.
Ein n-Tupel von natürlichen Zahlen $(a_1, a_2, \ldots, a_n), a_i > 0, i = 1, \ldots, n, n \geq 3$ heißt *Pythagoreisches Zahlen-n-Tupel* (kurz *P-n-Tupel* genannt), falls seine Zahlen die Gleichung $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n-1}^2 = a_n^2$ erfüllen.

(a) Man beweise: Ist die Differenz zweier Quadratzahlen von natürlichen Zahlen geradzahlig, so ist sie durch 4 teilbar.

(b) Man untersuche, ob ein P-102-Tupel mit geeigneten natürlichen Zahlen a_{101} und a_{102} existiert, dessen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ die ersten 100 natürlichen Zahlen 1, 2, ..., 100 sind!

(c) Gegeben sei ein P-n-Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots, a_n)$ mit ungeradzahligem a_n ($1 < k < n$) Man gebe ein P-(n+1)-Tupel an, das ebenfalls mit $a_1, a_2, \ldots, a_k$ beginnt?