

Aufgaben Serie 3 (2019/20)

Aufgabe 3-1. Kann man die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis 21 so in Teilmengen zerlegen, dass in jeder dieser Teilmengen die größte Zahl gleich der Summe der übrigen Zahlen dieser Teilmenge ist?

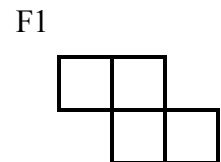
Aufgabe 3-2. Kann man ein Quadrat der Seitenlänge 5 cm vollständig mit drei Quadraten der Seitenlänge 4 cm überdecken, wenn keinerlei Einschränkung an die Lage dieser Quadrate gegeben wird?

Aufgabe 3-3. Die Zahlen 1, 2, 3, ..., 2017 stehen an der Tafel. Amalie und Boris wischen abwechselnd je eine dieser Zahlen weg, bis nur noch zwei Zahlen übrig bleiben. Amalie beginnt. Wenn die Summe der beiden letzten Zahlen durch 8 teilbar ist, gewinnt Amalie, ansonsten Boris.
Wer kann den Gewinn erzwingen?

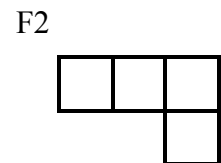
Aufgabe 3-4. Es sei Menge von 2017 ganzen Zahlen gegeben, sodass zu je drei dieser Zahlen auch deren arithmetisches Mittel enthalten ist. Beweisen Sie, dass alle Zahlen gleich sind.

Aufgabe 3-5A. (a) Zum vollständigen Auslegen des Fußbodens eines rechteckigen Zimmers sind rechteckige Platten des Formates 2 x 2 und solche des Formates 4 x 1 verwendet worden. Man beweise, dass das Auslegen nicht möglich ist, wenn man für das erneute Auslegen von der einen Sorte eine Platte weniger und von der anderen Sorte eine Platte mehr verwenden will.

(b) Man untersuche, ob der Fußboden eines rechteckigen Zimmers mit Platten der Form F1 vollständig ausgelegt werden kann.
(2 Punkte)



(c) Man gebe Bedingungen für die Seitenlängen des rechteckigen Zimmers an, so dass der Fußboden nur mit Platten der Form F2 ausgelegt werden kann.
(4 Punkte)



Aufgabe 3-5B. Gegeben seien drei natürliche Zahlen a , b , c , bei denen das Produkt von je zweien bei Division durch die dritte den Rest 1 lässt.

(a) Man zeige, die Zahlen a , b , c sind paarweise teilerfremd.

(b) Man beweise die Ungleichung $abc < ab + bc + ca$.

(c) Man finde alle Lösungen für die Zahlen a , b und c , die die beschriebene Eigenschaft haben.