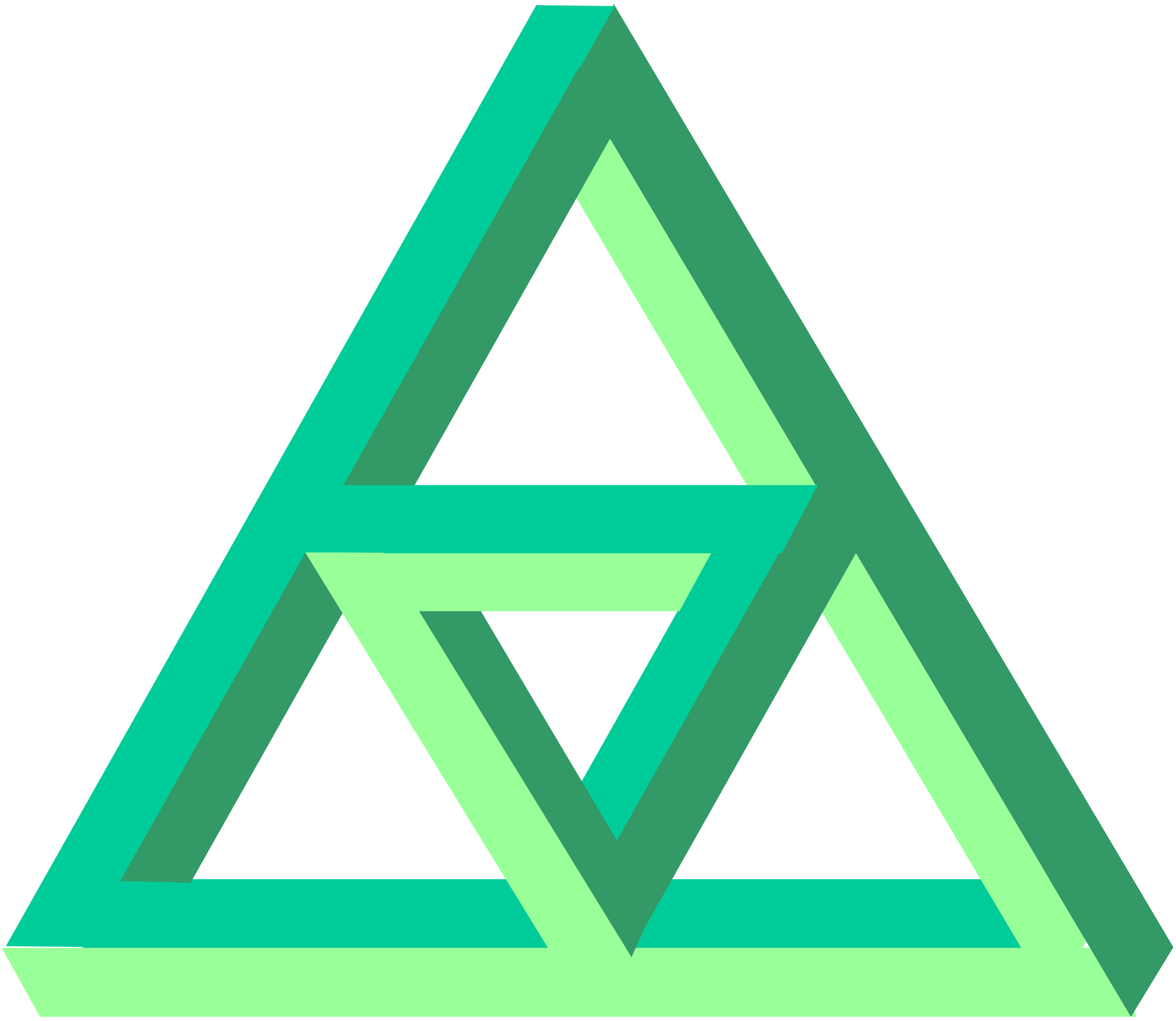
Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 6/2023 (Juni 2023) 22. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Wir beziehen uns noch einmal auf die Aufgabe **MO620936** und zeigen weitere Beispiele von Zahlenbeschriftungen, diesmal auf Körpern. Damit wollen wir die Vielfalt derartiger Wettbewerbsaufgaben verdeutlichen.

Mit Bezug zur Aufgabe **KZM 6-3** des Korrespondenzzirkels Mathematik diskutieren wir Lösungsansätze für Aufgaben mit (nicht-linearen) Gleichungssystemen, die sich auf den Wurzelsatz von VIETA begründen. Es zeigt sich, dass die Quantifizierung der im Wurzelsatz auftretenden Terme beitragen kann, die Nichtexistenz weiterer Lösungen zu beantworten.

Im historischen Rückblick zitieren wir aus einem Lehrbuch von 1895, wie damals Wurzelsatz von VIETA vermittelt wurde.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 22.02 – Zahlenverteilungen auf Körpern

Aufgabe 22.07 – MO341021.

a) Wie viele verschiedene Verteilungen der Zahlen 1, 2, ..., 6 auf die sechs Seitenflächen eines Würfels gibt es insgesamt?
b) Wie viele verschiedene unter diesen Verteilungen gibt es insgesamt, bei denen die zusätzliche Bedingung erfüllt ist, dass für jedes Paar einander gegenüberliegender Seitenflächen die Zahlen auf diesen beiden Flächen die Summe 7 haben?

Hinweis: In a) und b) gelten zwei Verteilungen genau dann als voneinander verschieden, wenn sie durch keine Drehung des Würfels ineinander überführt werden können.

Lösungshinweise Teil a) Wir nehmen einen Würfel und beschriften seine Seitenflächen so, dass jede der Zahlen von 1 bis 6 genau einmal vorkommt.

Dazu legen wir den Würfel so hin, dass 1 auf der oberen Seitenfläche liegt. Dann gibt es fünf Möglichkeiten, welche der Zahlen auf der unteren Seitenfläche steht. Anschließend drehen wir den Würfel so um die vertikale Achse, dass die kleinste Zahl nach vorn zeigt. Es gibt damit noch $3! = 6$ Möglichkeiten, wie die anderen drei Seitenflächen beschriftet wurden. Es gibt also insgesamt $5 \cdot 3! = 30$ paarweise verschiedene Verteilungen.

Lösungshinweise zu Teil b) Wir nehmen einen Würfel und beschriften seine Seitenflächen so, dass jede der Zahlen von 1 bis 6 genau einmal vorkommt und Zahlen gegenüberliegender Seitenflächen die Summe 7 haben.

Dazu legen wir den Würfel so hin, dass 1 auf der oberen Seitenfläche liegt. Da 6 (und nicht 2) auf der gegenüberliegenden Seite steht, können ihn so um die vertikale Achse drehen, dass die Seite mit der 2 nach vorn zeigt. Somit liegt 5 auf der hinteren Seite. Nun kann 3 auf der linken oder auf der rechten Seitenfläche stehen. Es gibt also insgesamt 2 Möglichkeiten. ❑

Aufgabe 22.08 – MO540936/MO541036. Die sechs Seitenflächen eines Würfels sollen so mit verschiedenen positiven ganzen Zahlen beschriftet werden, dass zwei Zahlen genau dann teilerfremd sind, wenn sie auf gegenüberliegenden Seitenflächen liegen.

a) Finden Sie eine derartige Beschriftung und weisen Sie nach, dass die angegebene Beschriftung die geforderte Eigenschaft hat.
b) Ermitteln Sie den kleinstmöglichen Wert, welchen die größte der sechs Zahlen einer derartigen Beschriftung annehmen kann.

Lösungshinweise – Vorbemerkung: Eine Beschriftung der Seitenflächen des Würfels entsprechend der gegebenen Bedingung nennen wir zulässig. Da zwei nicht gegenüberliegende Seitenflächen eines Würfels stets benachbart sind, ist eine Beschriftung genau dann zulässig, wenn auf gegenüberliegenden Seiten teilerfremde Zahlen und auf benachbarten Seiten nicht teilerfremde Zahlen stehen. Wir erzeugen eine spezielle Art von Beschriftung der Seitenflächen, indem wir zunächst den Kanten des Würfels Primzahlen zuordnen. Für jede Seitenfläche bilden wir dann die Menge der verschiedenen Primzahlen, die den vier angrenzenden Kanten zugeordnet sind. Aus diesen Zahlen berechnen wir anschließend das Produkt und beschriften damit die Seitenfläche.

Für derartige Beschriftungen gelten folgende Aussagen:

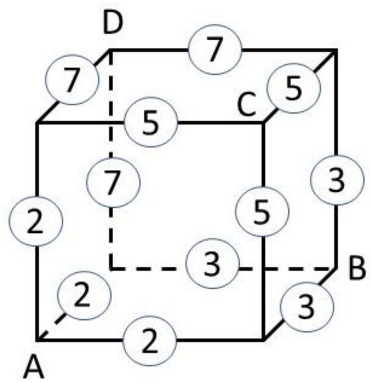
(1) Eine solche Beschriftung ist genau dann zulässig, wenn auf gegenüberliegenden Seitenflächen teilerfremde Zahlen stehen.

(2) In einer solchen zulässigen Beschriftung sind gegenüberliegenden Kanten derselben Seitenfläche verschiedene Primzahlen zugeordnet.

Zu (1): Nach Konstruktion sind benachbarte Seitenflächen nicht teilerfremd beschriftet, denn die beiden Beschriftungen enthalten als gemeinsamen Faktor wenigstens die Primzahl, die der gemeinsamen Kante zugeordnet ist. Die zweite Zulässigkeitsbedingung ist also automatisch erfüllt.

Zu (2): Diese beiden Kanten gehören zu gegenüberliegenden Seitenflächen, die ihnen zugeordneten Primzahlen gehen damit in teilerfremde Produkte ein und müssen somit selbst teilerfremd sein.

Lösungshinweise Teil a) Wir erzeugen eine zulässige Beschriftung nach dem eben beschriebenen Verfahren wie folgt: Wir wählen eine Ecke A des Würfels und bezeichnen die Endpunkte der drei von A ausgehenden Flächendiagonalen mit B, C und D. Von jedem dieser vier Eckpunkte gehen genau drei Würfelkanten aus, und diese Kantenmengen sind paarweise disjunkt. Den drei von A ausgehenden Würfelkanten wird nun jeweils 2 zugeordnet, den drei von B ausgehenden Würfelkanten jeweils 3, den drei von C ausgehenden Würfelkanten jeweils 5, den drei von D ausgehenden Würfelkanten jeweils 7 und daraus eine Beschriftung der Seitenflächen nach dem oben angegebenen Verfahren erzeugt.



Die Würfelseiten mit Ecke A sind dann mit den Zahlen $2 \cdot 3 = 6$, $2 \cdot 5 = 10$ und $2 \cdot 7 = 14$, die jeweils gegenüberliegenden Seiten mit den Zahlen $5 \cdot 7 = 35$, $3 \cdot 7 = 21$ und $3 \cdot 5 = 15$ beschriftet. Die Beschriftung ist nach (1) zulässig, da gegenüberliegende Seitenflächen teilerfremd beschriftet sind, wie durch einfaches Nachrechnen geprüft werden kann.

Anmerkung: Eine derart systematische Herleitung muss zum Lösen der Aufgabe nicht erbracht werden, allein der Nachweis ist erforderlich, dass die vom Schüler angegebene Lösung auch wirklich alle geforderten Eigenschaften hat.

Lösungshinweise Teil b) Wir zeigen nun, dass die größte der sechs Zahlen einer zulässigen Beschriftung mindestens gleich 35 ist.

Wir starten mit einer beliebigen zulässigen Beschriftung $a_1, \dots, a_6$ der Seitenflächen mit Maximum a und erzeugen daraus zunächst eine Zuordnung von Primzahlen zu Würfelkanten: In jeder Würfelkante stoßen genau zwei benachbarte Seitenflächen zusammen, die in einer zulässigen Beschriftung nicht teilerfremd beschriftet sind. Wir ordnen der Kante den größten gemeinsamen Primfaktor der beiden Seitenflächenbeschriftungen zu.

Nun bestimmen wir aus dieser Kantenbeschriftung nach obigem Verfahren eine zweite Beschriftung $b_1, \dots, b_6$ der Seitenflächen mit Maximum b. Ist P die Menge der Primzahlen zu den Kanten zur Seitenfläche i, so ist a_i durch jede Primzahl $p \in P$ teilbar und b_i gerade das einfache Produkt aller Primzahlen $p \in P$. Damit ist b_i ein Teiler von a_i und es folgt zunächst, dass nach (1) auch die zweite Beschriftung zulässig ist, denn wenn gegenüberliegende a_i teilerfremd sind, so erst recht gegenüberliegende b_i. Weiterhin gilt $a \geq b$.

Wir zeigen nun $b \geq 35$. Auf jeder Seitenfläche steht in der zweiten Beschriftung wegen (2) ein Produkt aus mindestens zwei Primzahlen. Ist eine Seitenfläche mit einem Produkt aus mindestens drei Primzahlen beschriftet, so handelt es sich dabei um das Produkt $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ oder um ein Produkt, das wenigstens gleich $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$ (also größer als 35) ist. Im ersten Fall sind den Kanten der Seitenfläche die Primzahlen {2, 3, 5} zugeordnet und somit den Kanten der gegenüberliegenden Seitenfläche wenigstens zwei Primzahlen größer als 5. Auf jener Seitenfläche ist also als Produkt mindestens $7 \cdot 11 = 77$ eingetragen. In beiden Fällen gilt $b > 35$.

Es bleibt der Fall zu betrachten, dass auf jeder Seitenfläche ein Produkt aus je genau zwei Primzahlen steht. Nach (2) ist dabei von den vier Kanten einer Seitenfläche zwei benachbarten die eine Primzahl und den anderen beiden benachbarten die andere Primzahl zugeordnet.

In einer Ecke A einer Seitenfläche S_1 des Würfels treffen also zwei Kanten zusammen, denen die gleiche Primzahl p zugeordnet ist. Die dritte Kante zur Ecke A gehört zu zwei weiteren Seitenflächen S_2 und S_3. S_2 enthält eine mit S_1 gemeinsame Kante mit zugeordneter Primzahl p, muss also noch eine zweite dazu benachbarte Kante mit zugeordneter Primzahl p enthalten. Dies kann nur die dritte Kante zur Ecke A sein, denn der andere Kandidat gehört zur Seitenfläche, die S_3 gegenüberliegt. Ihr ist folglich eine zu p teilerfremden Primzahl zugeordnet.

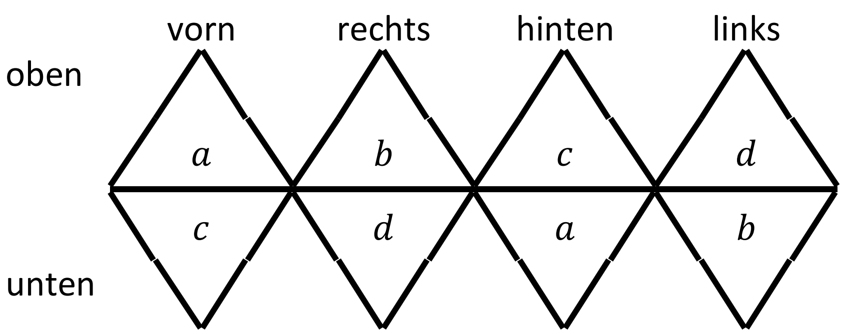
Die gleiche Überlegung trifft auf die von A aus über eine Diagonale erreichbaren Ecken zu und wir erhalten genau die im Teil a) konstruierte Zuordnung, allein möglicherweise mit paarweise verschiedenen Primzahlen $p_1 < p_2 < p_3 < p_4$ statt der Primzahlen $2 < 3 < 5 < 7$. Auch in diesem Fall ist $b = p_3 \cdot p_4 \geq 5 \cdot 7 = 35$.

Wir haben damit gezeigt, dass in jedem Fall die größte der sechs Zahlen einer zulässigen Beschriftung mindestens gleich 35 ist. Zusammen mit dem Beispiel aus a) ist damit gezeigt, dass das gesuchte Minimum gleich 35 ist. ❑

Aufgabe 22.09 – MO471021. Zum Würfeln kann man nicht nur klassische Würfel mit quadratischen Seitenflächen verwenden, sondern auch andere reguläre Körper, auf denen entsprechend Zahlen aufgebracht sind. Besonders der Oktowürf™ der Magic Dice Corporation – ein Oktaeder mit acht gleichseitigen Dreiecken als Seitenflächen – wird gern gekauft. In der Blue Edition der Firma sind die Seitenflächen mit den Zahlen von 1 bis 8 beschriftet, und zwar so, dass die Zahlen gegenüberliegender Seitenflächen sich stets zur selben Summe addieren.

Wie viele verschiedene Oktowürftypen kann die Blue Edition enthalten, d. h. wie viele unterscheidbare Möglichkeiten gibt es, ein regelmäßiges Oktaeder unter den obigen Bedingungen zu beschriften? Dabei soll es nur darauf ankommen, welche Zahlen auf den Seitenflächen stehen, nicht aber, wie die Beschriftung angebracht ist.

Lösungshinweise: Zunächst stellen wir uns vor, wir könnten alle acht Seitenflächen des Oktaeders unterscheiden. Zu diesem Zweck balancieren wir das Oktaeder auf einer seiner Ecken derart, dass sich die Seitenflächen wie im Oktaedernetz angegeben unterscheiden lassen. Hier sind die vier Paare gegenüberliegender Seitenflächen jeweils mit einem gemeinsamen Kleinbuchstaben gekennzeichnet.



Die Summe aller Zahlen auf den Seitenflächen des Oktaeders beträgt $1 + 2 + \cdots + 8 = 36$. Da die Summen der beiden Zahlen auf jeweils gegenüberliegenden Seitenflächen des Oktaeders konstant gleich sind, muss diese Summe $36 : 4 = 9$ betragen. Es gibt nun acht Möglichkeiten, eine Seitenfläche für die Zahl 1 auszuwählen, die Zahl 8 kommt dann auf die jeweils gegenüberliegende Seite. Danach verbleiben für die Zahl 2 insgesamt sechs Seitenflächen, während die Zahl 7 jeweils auf die gegenüberliegende Seite kommt. Analog ergeben sich für die Zahl 3 noch vier verbleibende Möglichkeiten und für die Zahl 4 schließlich zwei Möglichkeiten der Wahl einer Seitenfläche. Das ergibt insgesamt $8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 384$ geeignete Oktaeder bei unterscheidbaren Seitenflächen.

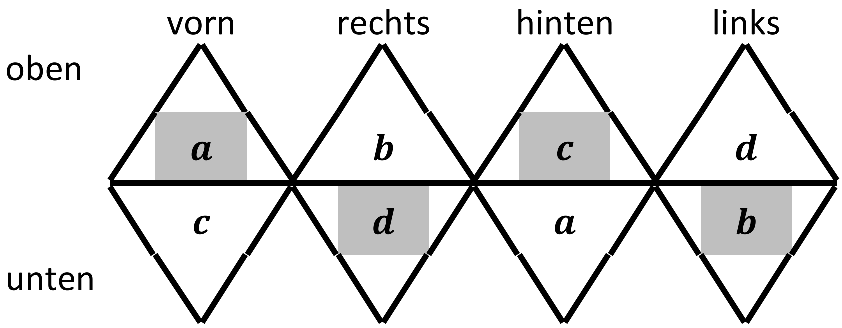
Die Seitenflächen sind aber nicht unterscheidbar, daher ergeben Beschriftungen, die sich durch Drehen des Oktaeders ineinander überführen lassen, gleiche Oktowürftypen. Diese Varianten wurden beim bisherigen Abzählverfahren unterschieden und deshalb mehrfach gezählt.

Für jedes Oktaeder gibt es 24 Drehbewegungen, die das Oktaeder in sich selbst und damit eine Beschriftung in eine andere Beschriftung derselben Variante überführen. (*Beweis:* Es gibt insgesamt sechs Möglichkeiten, die Ecke auszuwählen, welche in obigem Bild nach oben zeigt und anschließend noch jeweils vier Möglichkeiten, die Seitenfläche festzulegen, die sich vorn-oben befindet.) Es wurde also jede Beschriftung in $6 \cdot 4 = 24$ Varianten gezählt, was zu $384 : 24 = 16$ verschiedenen Oktowürftypen führt. ❑

Aufgabe 22.10 – MO471044. Zum Würfeln kann man nicht nur klassische Würfel verwenden, sondern auch andere reguläre Körper, auf denen entsprechend Zahlen aufgebracht sind. Besonders der Oktowürf™ der Magic Dice Corporation - ein Oktaeder mit acht gleichseitigen Dreiecken als Seitenflächen - wird gern gekauft. Deshalb plant die Firma, ihre Produktpalette durch eine Red Edition von Oktowürfs aus gehärtetem Kirschbaumholz zu ergänzen. Im Gegensatz zur altbewährten Blue Edition sollen in der Red Edition die Oktowürfs aber so beschriftet sein, dass benachbarte Zahlen niemals auf benachbarten Seitenflächen stehen.

Wie viele verschiedene Oktowürftypen kann die Red Edition enthalten, d. h. wie viele unterscheidbare Möglichkeiten gibt es, ein regelmäßiges Oktaeder unter den obigen Bedingungen zu beschriften? Dabei soll es nur darauf ankommen, welche Zahlen auf den Seitenflächen stehen, nicht aber, wie die Beschriftung angebracht ist.

Lösungshinweise: Zunächst stellen wir uns vor, wir könnten alle acht Seitenflächen des Oktaeders unterscheiden. Zu diesem Zweck balancieren wir das Oktaeder auf einer seiner Ecken derart, dass sich die Seitenflächen wie im folgenden Oktaedernetz angegeben unterscheiden lassen.



In obigem Bild sind die vier Paare gegenüberliegender Seitenflächen jeweils mit einem gemeinsamen Kleinbuchstaben gekennzeichnet. Zusätzlich wurden vier der acht Seitenflächen grau gefärbt. Bei dieser speziellen Färbung des Oktaeders sind benachbarte Seitenflächen, wie auch gegenüberliegende Seitenflächen, immer mit unterschiedlichen Farben belegt.

Das obige Oktaeder sei nun zusätzlich mit einer geeigneten Beschriftung versehen. Wir ordnen jeder solche Beschriftung eine Zeichenfolge aus acht Buchstaben zu, welche aus der Zeichenfolge „12345678“ entsteht, indem die Ziffer k; $k = 1; \dots; 8$ durch „w“ (wie weiß) ersetzt wird, wenn sie auf einer weißen Seitenfläche steht, sonst durch „g“ (wie grau). So bedeutet z. B. die Zeichenfolge „ggwgwgww“, dass die Zahlen 3, 5, 7 und 8 auf weißen Seitenflächen stehen, während sich alle anderen Zahlen auf grauen Seitenflächen befinden.

Es stellt sich nun die Frage, zu welchen Zeichenfolgen aus acht Buchstaben mindestens eine geeignete Beschriftung des Würfels existiert. Jede solche Zeichenfolge ist durch die folgenden drei Eigenschaften charakterisiert:

(1) Die Zeichenfolge enthält die Buchstaben „w“ und „g“ jeweils genau viermal.
(2) Die Buchstabenkombinationen „wg“ und „gw“ tauchen in der Zeichenfolge zusammen maximal viermal auf.
(3) Die Zeichenfolge enthält keine der Buchstabenkombinationen „wgw“ und „gwg“.

Begründung: (1) ist offensichtlich notwendig. Für (2) und (3) betrachten wir eine Zeichenfolge, welche eine der Buchstabenkombinationen „wg“ oder „gw“ enthält. Die zugehörigen Zahlen müssen auf verschiedenfarbigen, nicht benachbarten Seitenflächen des Oktaeders stehen. Da jede g-Fläche drei w-Nachbarn hat, kann es sich nur um gegenüberliegende Seitenflächen des Oktaeders handeln. (2) ergibt sich also, weil es nur vier Paare gegenüberliegender Seitenflächen gibt und (3), weil jede Seite nur genau ein Gegenüber hat.

Umgekehrt lässt sich aber auch jede Zeichenkette, welche den Bedingungen (1), (2) und (3) genügt, in einer Beschriftung realisieren. Man reserviere dazu für jede Buchstabenkombination „wg“ oder „gw“ ein Paar gegenüberliegender Seiten des Oktaeders und verteile anschließend die verbleibenden Zahlen auf die restlichen Seitenflächen.

Im Folgenden listen wir nun systematisch alle Zeichenketten mit den Eigenschaften (1), (2) und (3) auf und geben jeweils die Anzahl erzeugter Beschriftungen an.

Fall 1: Zeichenketten mit genau einer Kombination „wg“ oder „gw“.

wwwwgggg ggggwwww

Das ergibt zwei Zeichenketten, wobei sich jede von ihnen durch $4 \cdot (3!)^2 = 144$ verschiedene Beschriftungen realisieren lässt; es gibt vier Möglichkeiten, für die Kombination „wg" bzw. „gw" ein Paar gegenüberliegender Seiten auszuwählen (dort ist dann die Beschriftung festgelegt), und jeweils 3! Möglichkeiten, die verbleibenden grauen/weißen Zahlen auf die noch freien grauen/weißen Seitenflächen zu verteilen.

Fall 2: Zeichenketten mit genau zwei Kombination „wg" oder „gw".

wggggwww   gwwwwggg
wwggggww   ggwwwwgg
wwwggggw   gggwwwwg

Das ergibt 6 Zeichenketten, wobei sich jedes Wort durch $4 \cdot 3 \cdot (2!)^2 = 48$ verschiedene Beschriftungen realisieren lässt.

Fall 3: Zeichenketten mit genau drei Kombination „wg" oder „gw".

wggwwwgg   gwwgggww
wgggwwwg   gwwwgggw
wwggwwgg   ggwwggww
wwgggwwg   ggwwwggw

Das ergibt 8 Zeichenketten, wobei sich jedes Wort durch $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (1!)^2 = 24$ verschiedene Beschriftungen realisieren lässt.

Fall 4: Zeichenketten mit genau vier Kombination „wg" oder „gw".

wggwwggw   gwwggwwg

Das ergibt zwei Zeichenketten, wobei sich jede Zeichenkette durch $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ verschiedene Beschriftungen realisieren lässt.

Als Summe ergeben sich $2 \cdot 144 + 6 \cdot 48 + 8 \cdot 24 + 2 \cdot 24 = 816$ geeignete Beschriftungen. Die Seitenflächen der Spielwürfel sind nun aber nicht unterscheidbar. Beschriftungen, welche sich durch Drehen des Oktaeders ineinander überfuhren lassen, wurden also mehrfach gezählt.

Für jedes Oktaeder gibt es 24 Drehbewegungen, die das Oktaeder in sich selbst und damit eine Beschriftung in eine andere Beschriftung derselben Variante überfuhren. (*Beweis:* Es gibt insgesamt sechs Möglichkeiten, die Ecke auszuwählen, welche in obigem Bild nach oben zeigt und anschlie¼end noch jeweils vier Möglichkeiten, die Seitenfläche festzulegen, die sich vorn-oben befindet.) Es wurde also jede Beschriftung 24-mal gezählt, was zu $816 : 24 = 34$ unterscheidbaren Oktowürftypen führt. ❑

Im Aufgabentext wurde der *„Hinweis: Bitte beachten Sie bei Ihrer Arbeitseinteilung: Die vollständige Lösung der Aufgabe kann je nach Ansatz sehr zeitaufwändig sein."*

gegeben. Bei einer solchen ungewöhnlichen Aufforderung ist es empfehlenswert, Ergebnisse zunächst nur anzugeben (im Sinne eines Antwortsatzes) und erst dann auszuformulieren, wenn für die anderen Aufgaben die Lösungsdarstellungen nach eigenem Ermessen bereits als abgeschlossen gelten könnten.

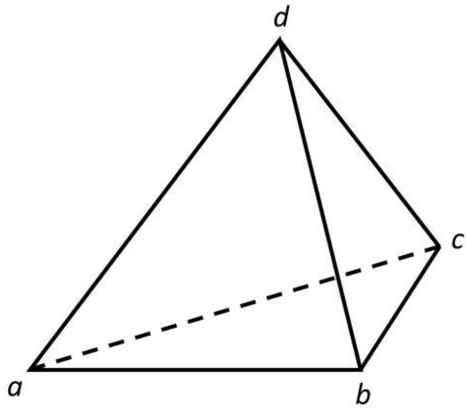
Aufgabe 22.12. Ein regelmäßiger Tetraeder ist ein Polyeder, dessen Seitenflächen regelmäßige Dreiecke sind, von denen in jeder Ecke drei zusammenstoßen. Ein Tetraeder hat 4 Seitenflächen, 6 Kanten und 4 Ecken.

Man zeige, dass es keine natürliche Zahl $n \geq 2$ gibt, für die es möglich ist, die Ecken eines Tetraeders so mit den Zahlen $1; 2; \dots; n$ zu beschriften, dass folgende Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind:

(1) An jeder Ecke steht genau eine der Zahlen $1; 2; \dots; n$.
(2) Jede der Zahlen $1; 2; \dots; n$ kommt gleich oft vor.
(3) Für jede Seitenfläche ist die Summe der Zahlen an ihren Ecken dieselbe.

Lösungshinweise: Da jede der n Zahlen gleich oft vorkommt und es vier Ecken gibt, muss n ein Teiler von 4 sein. Es muss also $n = 2$ oder $n = 4$ gelten.

Für $n = 4$ kann die Eigenschaft (3) offenbar nicht erfüllt werden. Bezeichnen wir mit a, b, c, d die (paarweise verschiedenen) Zahlen an den Ecken, so müsste für die zwei in der Abbildung von vorn und von rechts sichtbaren benachbarten Seitenflächen $a + b + d = b + c + d$ gelten, woraus jedoch $a = c$ folgt.



Ist dagegen $n = 2$, so gibt es eine Seitenfläche, bei der zwei Eckpunkte mit 1 und ein Eckpunkt mit 2 beschriftet sind. Dann trägt der vierte Eckpunkt die Zahl 2 und es gibt eine andere Seitenfläche, bei der ein Eckpunkte mit 1 und zwei Eckpunkte mit 2 beschriftet sind. Damit ist aber die Eigenschaft (3) wegen $1 + 1 + 2 \neq 1 + 2 + 2$ verletzt.

Es kann also keine Beschriftung der geforderten Art geben. ❑

Aufgabe 22.13. Ein regelmäßiger Hexaeder ist ein Polyeder (im Allgemeinen als Würfel bezeichnet), dessen Seitenflächen regelmäßige Vierecke sind, von denen in jeder Ecke drei zusammenstoßen. Ein Hexaeder hat 6 Seitenflächen, 12 Kanten und 8 Ecken.

Man bestimme alle natürlichen Zahlen n, für die es möglich ist, die Ecken eines Hexaeders so mit den Zahlen $1; 2; \dots; n$ zu beschriften, dass folgende Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind:

(1) An jeder Ecke steht genau eine der Zahlen $1; 2;\ \dots; n$.
(2) Jede der Zahlen $1; 2; \dots; n$ kommt gleich oft vor.
(3) Für jede Seitenfläche ist die Summe der Zahlen an ihren Ecken dieselbe.

Lösungshinweise: Da jede der n Zahlen gleich oft vorkommt und es acht Ecken gibt, muss n ein Teiler von 8 sein. Wir untersuchen deshalb nur die Fälle $n = 1, 2, 4, 8$.

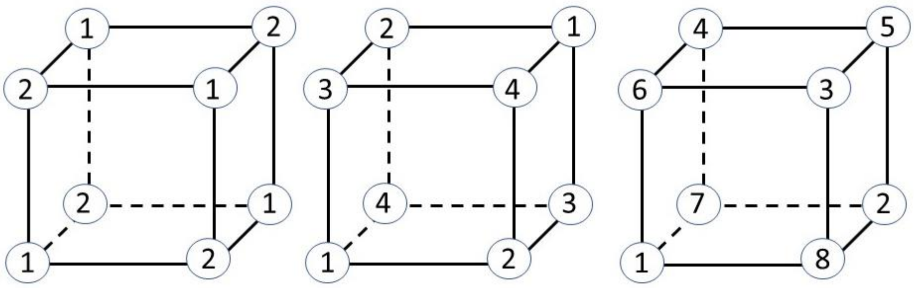
Wir überlegen uns dafür zuerst, wie groß die Summe S der Zahlen an den Ecken einer Seitenfläche sein wird. Addieren wir alle Zahlen der Beschriftung des Hexaeders, so erhalten wir aufgrund der Gleichverteilung der Zahlen unter Verwendung der GAUßschen Summenformel[3]

$$\frac{8}{n} \cdot (1 + 2 + \cdots + n) = \frac{8}{n} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} = 4 \cdot (n+1).$$

Addieren wir nun die Zahlen aller sechs Seitenflächen, erhalten wir einerseits $6 \cdot S$. Andererseits wird dabei jede der Zahlen dreimal gezählt, da an jeder Ecke des Hexaeders drei Seitenflächen zusammenstoßen. Wir erhalten somit das Dreifache der Summe aller Zahlen, also $12 \cdot (n+1)$. Damit finden wir $6 \cdot S = 12 \cdot (n+1)$, also $S = 2 \cdot (n+1)$.

- Für $n = 1$ (d.h. wir beschriften alle Ecken mit der Zahl 1) erscheint $S = 4$ trivial.
- Auch für $n = 2$ ist $S = 6$ leicht realisierbar.
- Für $n = 4$ erhalten wir $S = 10$. Wegen $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ erfordert dies, dass auf den Eckpunkten jede Seitenfläche die Zahlen $1, 2, 3, 4$ anzuordnen sind.
- Schließlich finden wir für $n = 8$ die Summe $S = 18$. Wegen $1 + 2 + 7 + 8 = 3 + 4 + 5 + 6 = 18$ kann es gelingen, eine Beschriftung mit den Zahlen $1, 2, 7, 8$ auf den Eckpunkten einer Seitenfläche und den Zahlen $3, 4, 5, 6$ auf den Eckpunkten der gegenüberliegenden Seitenfläche zu finden.

Für $n = 1$ ist die Beschriftung in trivialer Weise möglich. Wir geben nun für jeden der anderen Fälle $n = 2, 4, 8$ eine Beschriftung an, die den Bedingungen (1) bis (3) genügt, und zeigen somit, dass es für diese Fälle ebenfalls tatsächlich möglich ist:



❑

[3] Die GAUßsche Summenformel kann als bekannt vorausgesetzt werden, jedoch ist in der Lösungsdarstellung deren korrekte Anwendung zu zeigen. Eine Formulierung wie „Die Gesamtsumme beträgt laut GAUßscher Summenformel $4 \cdot (n+1)$“ genügt nicht!

Aufgabe 22.14 – MO480936. Ein Dodekaeder (genauer: Pentagondodekaeder) ist ein Polyeder, dessen Seitenflächen regelmäßige Fünfecke sind, von denen in jeder Ecke drei zusammenstoßen. Ein Dodekaeder hat 12 Seitenflächen, 30 Kanten und 20 Ecken.

Man bestimme alle natürlichen Zahlen n, für die es möglich ist, die Ecken eines Dodekaeders so mit den Zahlen $1; 2; \dots; n$ zu beschriften, dass folgende Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind:

(1) An jeder Ecke steht genau eine der Zahlen $1; 2; \dots; n$.
(2) Jede der Zahlen $1; 2; \dots; n$ kommt gleich oft vor.
(3) Für jede Seitenfläche ist die Summe der Zahlen an ihren Ecken dieselbe.

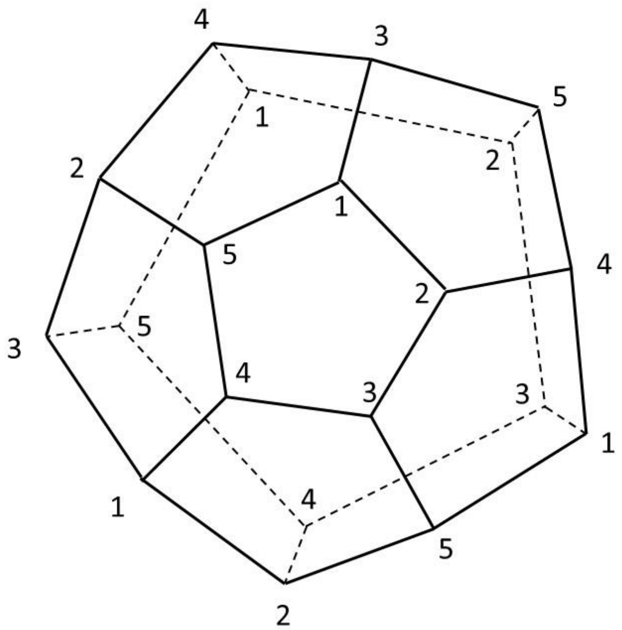
Lösungshinweise: Da jede der n Zahlen gleich oft vorkommt und es 20 Ecken gibt, muss n ein Teiler von 20 sein. Addieren wir alle Zahlen der Beschriftung des Dodekaeders, so erhalten wir aufgrund der Gleichverteilung der Zahlen unter Verwendung der GAUßschen Summenformel

$$\frac{20}{n} \cdot (1 + 2 + \cdots + n) = \frac{20}{n} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} = 10 \cdot (n+1).$$

Wir bezeichnen die laut (3) ergebenden Summen mit S. Addieren wir die Zahlen aller 12 Seitenflächen, erhalten wir einerseits $12 \cdot S$. Andererseits wird dabei jede der Zahlen dreimal gezählt, da an jeder Ecke des Dodekaeders drei Seitenflächen zusammenstoßen. Wir erhalten also das Dreifache der Summe aller Zahlen, also $30 \cdot (n+1)$, d.h. $12 \cdot S = 30 \cdot (n+1)$ und damit $2 \cdot S = 5 \cdot (n+1)$.

Da die linke Seite dieser Gleichung geradzahlig ist, muss n eine ungerade Zahl sein. Die einzigen ungeraden Teiler von 20 sind 1 und 5.

Wenn es Beschriftungen der geforderten Art gibt, kann dies nur für $n = 1$ oder $n = 5$ sein. Der Fall $n = 1$ ist trivial, an jeder Ecke steht die Zahl 1. Für $n = 5$ zeigt die Abbildung, dass es eine solche Beschriftung gibt. ❑



Der VIETAsche Wurzelsatz als Lösungsansatz für Gleichungssysteme

Hat ein Polynom $P(x) = x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$ mit reellwertigen Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_n$ insgesamt n reellwertige Nullstellen $x_1, x_2, \dots, x_n$, so gilt nach dem VIETAschen Wurzelsatz im Fall $n = 2$ und $n = 3$:

$$x_1 + x_2 = -a_1\ ;\ x_1 \cdot x_2 = a_0$$

bzw.

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a_2\ ;\ x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_1 = a_1\ ;\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -a_0.$$

Diese Zusammenhänge bieten oft einen hilfreichen Zugang zur Lösung von Polynomgleichungen und (nichtlinearen) Gleichungssystemen.

Aufgabe KZM 6-4. Ermitteln Sie diejenigen Tripel $(x; y; z)$ von reellen Zahlen x, y und z, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$x + y + z = 9 \quad ; \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \quad ; \quad xy + yz + zx = 27\ .$$

Lösungshinweise: Wir suchen aus den Gleichungen die Angaben für die Koeffizienten eines dazugehörigen Polynoms. Für das Produkt der drei Variablen gilt

$$xyz = xyz \cdot 1 = xyz \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = yz + xz + xy = 27.$$

Damit sind über den Wurzelsatz von VIETA die Koeffizienten des Polynoms bekannt:

$$P(u) = u^3 - 9u^2 + 27u - 27 = (u-3)^3.$$

Folglich gibt es nur die (ohnehin leicht erratbare) Lösung $x = y = z = 3$. ❑

Aufgabe – MO261043A[4]. Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel (x_1, x_2, x_3) von reellen Zahlen x_1, x_2, x_3, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen!

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3 \quad (1)$$
$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3 \quad (2)$$
$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 1 \quad (3)$$

Lösungshinweise: Da mit den Bedingungen (1) und (3) bereits Terme des Wurzelsatzes von VIETA zu erkennen sind, versuchen wir, auch den dritten Term $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$ zu quantifizieren. Wir überzeugen uns durch Ausmultiplizieren aller Produkte und Zusammenfassen der Terme, dass folgende Gleichung richtig ist:

$$(x_1 + x_2 + x_3)^3 =$$
$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3(x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - 3x_1x_2x_3$$

Setzen wir in diese Gleichung die in der Aufgabenstellung gegebenen Werte (1) bis (3) ein, erhalten wir

$$3^3 = 3 + 3 \cdot 3 \cdot (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - 3 \cdot 1$$

[4] Das A am Ende der Nummerierung verweist darauf, dass es Jahrgänge gab, in denen bei der dritten Aufgabe zwischen zwei unterschiedlichen Aufgabenstellungen genau eine für die Bearbeitung ausgewählt werden konnte.

Diese Gleichung können wir zu $(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 3$ zusammenfassen.

Damit gibt es nach dem Wurzelsatz von VIETA für das Gleichungssystem genau dann ein Lösungstripel mit reellen Zahlen x_1, x_2, x_3, wenn das Polynom

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

drei reelle Nullstellen x_1, x_2, x_3 hat.

Wegen $P(x) = (x-1)^3$ finden wir $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ als einzig mögliches Lösungstripel. Eine Probe bestätigt, dass damit das Gleichungssystem tatsächlich erfüllt wird:

$$\begin{aligned} &1 + 1 + 1 = 3 && (1) \\ &1^3 + 1^3 + 1^3 = 3 && (2) \\ &1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 && (3) \end{aligned}$$

❑

Hinweis: Das Lösungstripel können wir erraten. Mit der Probe bestätigen wir, dass es das Gleichungssystem erfüllt. Dies kann als Ergebnis bereits formuliert werden. Für eine vollständige Lösungsdarstellung muss aber nun noch gezeigt werden, dass es keine weiteren Lösungstripel geben kann. Diesen schwierigeren Teil des Lösungsansatzes können wir mit dem Wurzelsatz von VIETA umgehen.

Aufgabe. Zeigen Sie, dass das folgende Gleichungssystem für $a \neq 0$ kein Lösungstripel $(x; y; z)$ mit reellen Zahlen x, y und z besitzt:

$$\begin{aligned} &x + y + z = a \\ &xy + yz + zx = a^2 \\ &xyz = a^3 \end{aligned}$$

Lösungshinweise: Wir betrachten die Variablen x, y und z als Lösungen einer Polynomgleichung 3. Grades. Dann ist die Unlösbarkeit für $a \neq 0$ schnell gezeigt: Nach dem Wurzelsatz von VIETA lässt sich die zugehörige Polynomgleichung darstellen als

$$P(u) = u^3 - a \cdot u^2 + a^2 \cdot u - a^3 = (u - a) \cdot (u^2 + a^2)$$

Offensichtlich kann P nicht drei reelle Nullstellen haben und somit existiert auch kein reelles Lösungstripel für das Gleichungssystem. ❑

Hinweis: Für $a = 0$ sind Tripel der Form $(0; t; -t)$, $(t; 0; -t)$ und $(t; -t; 0)$ mit beliebigen reellen zahlen t Lösungen des Gleichungssystems.

Aufgabe. Beweisen Sie, dass die Funktion $f(x) = x^3 - x^2 + x + r$ für alle reellen Zahlen r nur eine reelle Nullstelle besitzt.

Lösungshinweise: Wir schreiben die Gleichungen des Wurzelsatzes auf. Gäbe es nämlich drei reelle Nullstellen x_1, x_2 und x_3, so gilt für diese:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -(-1)$$
$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 1$$

Dann folgt aber daraus der Widerspruch

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2 \cdot (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) \ = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1,$$

denn eine Summe von reellen Quadratzahlen (linke Seite der Gleichungskette) kann nicht negativ sein. Damit ist gezeigt, dass es keine drei reellen Nullstellen geben kann. Da aber ein Polynom 3. Grades stets entweder eine reelle Nullstelle oder drei reelle Nullstellen hat, besitzt – wie behauptet – das kubische Polynom für jede reelle Zahl r nur genau eine reelle Nullstelle. ❑

Bei Aufgabenstellungen mit zwei Variablen bringt die Verwendung des Wurzelsatzes von VIETA oftmals keinen spürbaren Aufwandsvorteil. Eine direkte Umformung der gegebenen Aussagen zu quadratischen Gleichungen in einer Variablen führt indirekt zu vergleichbaren Lösungsstrategie.

Aufgabe – MO291042. Von zwei reellen Zahlen werde gefordert: Die Summe aus dem Reziproken der beiden Zahlen und dem Reziproken des Produktes der beiden Zahlen beträgt 1.

Man ermittle alle diejenigen Werte, die sich als Summe s zweier derartiger Zahlen ergeben können.

Lösungshinweise: Wir formen die Gleichung $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = 1$ (für die $x \neq 0$ und $y \neq 0$ notwendig ist) zu $x + y + 1 = xy$ um und finden mit der Summe $s = x + y$ aufgrund des Wurzelsatzes von VIETA die quadratische Gleichung

$$f(z) = z^2 - s \cdot z + s + 1 = 0$$

mit den Lösungen x und y. Die Diskriminante der quadratischen Gleichung lautet $D = \frac{s^2}{4} - s - 1$. Es existieren also nur für $D \geq 0$ reellwertige Lösungen. Diese Bedingung ist gleichbedeutend zu $s^2 - 4s - 4 \geq 0$. Daraus folgern wir:

$$(s-2)^2 \geq 8$$
$$|s-2| \geq 2\sqrt{2}$$

also

$$s \leq 2 - 2\sqrt{2} \text{ oder } s \geq 2 + 2\sqrt{2}$$

Wir müssen jedoch beachten, dass sich im Fall von $s = -1$ die quadratische Gleichung auf $f(z) = z^2 + z = z \cdot (z + 1) = 0$ reduziert. Eine Lösung dieser Gleichung ist 0, was aber nicht zulässig ist. Wegen $8 < 9$ gilt $2\sqrt{2} < 3$ und deshalb gilt die Abschätzung $-1 = 2 - 3 < 2 - 2\sqrt{2}$. Wir erhalten also insgesamt die Lösungsmenge für s:

$$s < -1 \quad \text{oder} \quad -1 < s \leq 2 - 2\sqrt{2} \quad \text{oder} \quad s \geq 2 + 2\sqrt{2}$$ ❑

Aufgabe – MO171046. Man ermittle alle reellen Lösungen des Gleichungssystems!

$$x + xy + y = 2 + 3\sqrt{2}$$
$$x^2 + y^2 = 6$$

Lösungshinweise: Wir erkennen wieder die Terme aus dem Wurzelsatz von VIETA und setzen $x + y = -p$ und $xy = q$. Dann lauten die gegebenen Gleichungen

$$q - p = 2 + 3\sqrt{2}$$
$$p^2 - 2q = 6$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit 2 und addieren anschließend beide Gleichungen, so erhalten wir die quadratische Gleichung

$$p^2 - 2p - 10 - 6\sqrt{2} = 0.$$

Wir lösen diese Gleichung mit der bekannten Lösungsformel für quadratische Gleichungen und erhalten

$$p_{1,2} = 1 \pm \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} = 1 \pm \sqrt{\left(3 + \sqrt{2}\right)^2} = 1 \pm \left(3 + \sqrt{2}\right).$$

Die Doppeldeutigkeit der Lösungen bzgl. $\sqrt{a^2} = |a|$ und $\sqrt{a^2} = -|a|$ wird durch das Zeichen ± abgedeckt und wirkt sich nur auf das Vertauschen von p_1 und p_2 aus.

Für $p_1 = -2 - \sqrt{2}$ erhalten wir $q_1 = 2 + 3\sqrt{2} + p_1 = 2\sqrt{2}$ und finden über den Wurzelsatz von VIETA die dazugehörige quadratische Gleichung

$$f(z) = z^2 - \left(2 + \sqrt{2}\right)z + 2\sqrt{2} = 0$$

mit den Lösungen

$$z_1 = x = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 - 2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2} = 2$$
$$z_2 = y = 1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2} - \sqrt{\left(1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 - 2\sqrt{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2} - \sqrt{\left(1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2}$$

Wie wir durch Einsetzen von $(x; y) = \left(2; \sqrt{2}\right)$ zeigen, sind dies tatsächlich Lösungen:

$$x + xy + y = 2 + 2 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2 + 3\sqrt{2}\,; \;\; 2^2 + \sqrt{2}^2 = 4 + 2 = 6$$

Für $p_2 = 4 + \sqrt{2}$ erhalten wir $q_2 = 2 + 3\sqrt{2} + p_2 = 6 + 4\sqrt{2}$ und finden über den Wurzelsatz von VIETA die quadratische Gleichung

$$f(z) = z^2 - \left(4 + \sqrt{2}\right)z + 6 + 4\sqrt{2} = 0.$$

Für diese quadratische Gleichung ist die Diskriminante $D = \left(2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 - 6 - 4\sqrt{2}$ mit $D = -\frac{3}{2} - 2\sqrt{2}$ jedoch negativ. Es gibt außer $\left(2; \sqrt{2}\right)$ und die dazu symmetrische Lösung $\left(\sqrt{2}; 2\right)$ keine weiteren reellwertigen Lösungen des Gleichungssystems. ❑

Aufgabe – MO391141. Man ermittle für jede reelle Zahl a die Anzahl der reellwertigen Lösungspaare $(x\,;\ y)$ des Gleichungssystems

$$|x| + |y| = 1,$$
$$x^2 + y^2 = a.$$

Lösungshinweise: Aufgrund der Betragszeichen und der Quadrate genügt es, wenn wir zunächst untersuchen, ob nichtnegative Zahlen x und y Lösungen des Gleichungssystems sein können. Angenommen, es existieren solche Lösungen, o.B.d.A. mit $x \geq y$. Wegen

$$xy = \frac{(x+y)^2 - x^2 - y^2}{2} = \frac{1^2 - a}{2}$$

können wir mithilfe des Wurzelsatz von VIETA die quadratische Funktion aufschreiben, deren Nullstellen x und y diese Lösungen sind:

$$f(z) = z^2 - z + \frac{1-a}{2} = 0.$$

Die Diskriminante dieser Gleichung lautet $D = \frac{1}{4} - \frac{1-a}{2} = \frac{2a-1}{4}$. Es gilt:

1) Für $D < 0$, d.h. für $a < \frac{1}{2}$, kann es keine reellwertigen Lösungen geben.
2) Für $D = 0$, d.h. für $a = \frac{1}{2}$, sind $x = y = \frac{1}{2}$ die nichtnegativen Lösungen. Folglich existieren in diesem Fall insgesamt vier verschiedene Lösungspaare:

$$\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right).$$

3) Für $D > 0$, d.h. für $a > \frac{1}{2}$, erhalten wir die Lösungen $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2a-1}$ und $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2a-1}$.

Jedoch finden wir für $a > 1$ die Ungleichungen $x > 1$ im Widerspruch zu $x + y = 1$, so dass es für diese Bedingung keine Lösungspaare mit nichtnegativen x und y geben kann.

Dagegen gibt es für $a = 1$ das Lösungspaar $x = 1$ und $y = 0$, so dass es in diesem Fall vier verschiedene Lösungspaare gibt:

$$(1\,;0)\,,(-1\,;0)\,,(0\,;1)\,,(0\,;\,-1).$$

Schließlich existieren für $\frac{1}{2} < a < 1$ insgesamt acht verschiedene Lösungspaare:

$$\left(\pm\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2a-1}\right)\,;\,\pm\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2a-1}\right)\right),$$
$$\left(\pm\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2a-1}\right)\,;\,\pm\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2a-1}\right)\right).$$

❑

Mathematik im Wettbewerb „Jugend forscht“

Der Bundeswettbewerb „Jugend forscht“ wird von der gleichnamigen Stiftung ausgerichtet [5]. Im Jahre 1965 rief der damalige Chefredakteur und Herausgeber des STERN, HENRI NANNEN, den Wettbewerb „Jugend forscht“ ins Leben, um der naturwissenschaftlich-technischen Nachwuchsforschung ein Podium für ihre Aktivitäten zu bieten. Ab 1975 ist „Jugend forscht“ ein gemeinsames Förderungswerk des Bundesministeriums für Bildung und Wissenschaft sowie des STERN. Die Schirmherrschaft hat der Bundespräsident übernommen.

Die Wettbewerbsidee ist dem ursprünglichen Anliegen treu geblieben. Alles, was in den sieben Fachgebieten[6] (FG) Arbeitswelt, Biologie, Chemie, Geo- und Raumwissenschaft, Mathematik/Informatik, Physik und Technik untersuchenswert erscheint, kann aufgegriffen, erarbeitet und schließlich in den Regionalwettbewerben präsentiert werden. Sowohl als Einzelstarter als auch in einer Gruppe bis zu drei Teilnehmenden können Mädchen und Jungen bis 14 Jahre („Schüler experimentieren“) bzw. Jugendliche zwischen 15 und 21 Jahre („Jugend forscht“) starten. Die Anmeldung bis zum 30. November ist gleichermaßen die Startberechtigung – vorausgesetzt, bis zum Einsendetermin im Januar des Folgejahres kann eine etwa 15-seitige Darstellung des Projektes vorgelegt werden. Diese Arbeit ist zum Wettbewerb öffentlich vorzustellen: an einem Stand steht man Juroren, Gästen und den anderen Teilnehmenden Rede und Antwort.

---

[5] www.jugend-forscht.de

[6] Schwer klassifizierbare Themen können als interdisziplinäre Arbeiten gesondert bewertet werden.

Der Gesamteindruck aus schriftlicher Arbeit, Poster und mündlicher Darstellung entscheidet über die Preisvergabe. Wesentliche Erfolgskriterien sind: Originalität, Eigenständigkeit, Kreativität. Kaum einer geht leer aus, viele Sonderpreise sind Lohn für die Leistungen. Die Besten jedes Fachgebietes (und das können auch jeweils mehrere sein) werden zur Teilnahme am Landesausscheid eingeladen, wo sie die Chancen erhalten, als Landesbeste ins Bundesfinale zu gelangen.

Schuljahr	Teilnehmerzahl (Anmeldungen zur 1. Runde)	Patenfirma des Bundesfinales
2020/21	8.998	*Experimenta gGmbH Heilbronn (Online-Veranstaltung)*
2021/22	8.527	*FORSCHUNGSFORUM Schleswig-Holstein e.V. Lübeck*
2022/23	9.386	*Unternehmensverbände im Lande Bremen e. V. Bremen*

Gesamt-Teilnehmerzahl und Patenfirma des Bundesfinales

Das **Fachgebiet Mathematik/Informatik** eignet sich eigentlich gut für eine Präsentation eigener Untersuchungen, zeigt aber auch im Jahr 2023 bundesweit mit 701 Teilnehmende (7.5%) wieder beinahe die geringste Resonanz, knapp vor dem FG Geo- und Raumwissenschaft (510 Teilnehmende, 5.4%) und deutlich weniger als zum Beispiel im FG Physik (1306 Teilnehmende, 13.9%) oder im FG Technik (1846 Teilnehmende, 19.7%).

Der Landeswettbewerb Sachsen fand am 1. April 2023 bei Porsche Leipzig GmbH statt. Drei Patenunternehmen unterstützten die Veranstaltung: GLOBALFOUNDRIES Dresden, DAS Environmental Expert GmbH Dresden und BGH Edelstahlwerke GmbH Freital. Es waren 16 Teilnehmende mit 15 Projekten am Start. Dazu hatten sich noch neun Schülerinnen und Schüler mit sechs Projekten in der Sparte „Schüler experimentieren" qualifiziert. Hier war das FG Mathematik/Informatik mit drei Projekten „Jugend forscht" (20.0%) und zwei Projekten „Schüler experimentieren" (33.3%) überdurchschnittlich vertreten.

Jeder, der sich schon einmal mit einer mathematischen Problemstellung vertieft befasst hat, sollte seine Ergebnisse auch bei „Jugend forscht" vorstellen. Die Mühe der Präsentationsvorbereitung lohnt sich auf alle Fälle! Bei Anfrage wird gern Unterstützung bei der Themenfindung, der inhaltlichen Umsetzung und gegebenenfalls der Betreuersuche gegeben – aber jede Lehrerin und jeder Lehrer fürs Fach Mathematik ist gleichermaßen ein Ansprechpartner. Am 1. Juli 2023 findet in

Chemnitz[7] dafür ein Seminar statt, dass unter anderem Anforderungen des Wettbewerbs „Jugend forscht“ thematisiert und Ideen für Projekte diskutiert.

Die folgende Übersicht der Themen der sächsischen Landeswettbewerbe aus vergangenen Jahren gibt einen Eindruck über die Vielfalt der untersuchten Fragestellungen im Fachgebiet Mathematik/Informatik – auch wenn manche Projekttitel nur wenig über den Inhalt verraten:

Benedix, Alexander (TU Dresden): **Integration über sphärische Dreiecke** *2. Platz, Sonderpreis c’t Magazin, Sonderpreis Studienseminar im Kerschensteiner Kolleg des Deutschen Museums in München*	2023
Beyer, Henning (Arwed-Rossbach-Schule – BSZ Leipzig): **Einsatz effektiverer Transformer-Encoder** *2. Platz, Sonderpreis Elektronik, Energie- oder Informationstechnik*	2023
Beyer, Henning (Arwed-Rossbach-Schule – BSZ Leipzig): **Geschwindigkeits-optimierung des IMoJIE-Modells** *2. Platz, Sonderpreis c’t Magazin, Sonderpreis Rundfunk-, Fernseh- und Informationstechnik*	2022
Droste, Alexander (Universität Leipzig, vormals Ostwald-Gymn. Leipzig): **Penrose-Parkettierung** *Landessieger, Teilnahme am Bundesfinale 2022 (2. Preis)*	2022
Hertel, Christian (Nexö-Gymn. Dresden): **Echtzeit-Synchronisierung von Audio-Streams** *Sonderpreis Jugend unternimmt – Summer School, Sonderpreis futureSAX*	2022
Kraft, Maximilian: **Neuronale Netzwerke in der autonomen Robotik** *2. Platz, Sonderpreis Mobilität, Sonderpreis Elektrostatik, Elektrotechnik und Mikroelektronik*	2021
Lowa, Alexander/ Voigtmann, Richard (TU Dresden): **Falschinformationen erkennen mithilfe von KI** *Landessieger, Teilnahme am Bundesfinale, Sonderpreis Staatsministerium für Wirtschaft, Arbeit und Verkehr, futureSAX Sonderpreis*	2023
Neubauer, Hannah (Mosen-Gymn. Oelsnitz/Vogtl.): **Simulation des Covid-19-Pandemieverlaufes** *3. Platz, Sonderpreis Thinkig Safety*	2022
Petrich, Moritz (Landesgymn. St. Afra Meißen): **Zirkusnummer mit Quadraten** *2. Platz*	2021
Weiß, Konrad (Regenbogen Gymn. Augustusburg): **Neuronale Netze und Algorithmen bei „Snake“** *3. Platz, Sonderpreis PM Magazin, futureSAX Sonderpreis*	2021

[7] siehe http://www.kzm-sachsen.de/html/seminare.html

Den 58. Bundeswettbewerb richtete die Stiftung Jugend forscht e. V. gemeinsam mit den Unternehmensverbänden im Lande Bremen e. V. in Bremen vom 18. bis 21. Mai 2023 aus. Insgesamt 173 Finalisten hatten sich mit ihren 108 Projekten während des Finales einer Expertenjury aus Wissenschaft und Forschung gestellt, darunter 31 Teilnehmende mit 21 Projekten im Fachgebiet Mathematik/Informatik. Den 1. Preis errangen SIMON RULLE und ARTHUR ACHILLES vom Gymnasium St. Michael, Paderborn (Nordrhein-Westfalen) mit ihrem Projekt „Hassreden auf der Spur: Project Eagle – Echtzeitanalyse antisemitischer Verschwörungsmythen im Netz“.

Der Finalsieg war mit einem Preisgeld der Fraunhofer-Gesellschaft zur Förderung der angewandten Forschung e.V. (2500 €) und dem Sonderpreis „Stipendium für einen Studienplatz an einer Universität der Bundeswehr“ vom Bundesminister der Verteidigung, BORIS PISTORIUS. Über die Siegerarbeit ist unter www.jugend-forscht.de in der Preisträgerbroschüre[8] lesen:

> *In den sozialen Netzwerken finden sich unzählige antisemitische Kommentare und Hassreden. Viele davon basieren auf bekannten Verschwörungsmythen. Derartige Tweets und Postings schnell und zielgerichtet zu identifizieren, ist aufgrund der schieren Datenmenge eine große Herausforderung. Daher entwickelten Simon Rulle und Arthur Achilles eine Software, die diesen Vorgang automatisch erledigt und antisemitische Inhalte so zuverlässig aus dem Internet herausfiltern kann. Die Jungforscher setzten dafür unter anderem aktuelle KI-Chatbots ein, die ähnlich wie ChatGPT funktionieren. Die Suchergebnisse zeigt das Programm als anschauliche Grafiken an. Mit dem Programm lässt sich auch rekonstruieren, wie die Zahl antisemitischer Tweets eines Accounts mit der Zeit zugenommen hat.*

SIMON RULLE und ARTHUR ACHILLES beeindruckten die Jury durch die Kombination verschiedener informatischer Methoden zu einem neuen Instrument, das nicht nur antisemitische Tweets erkennt, sondern auch die dazugehörigen Kommunikationsgruppen. Sie wenden ihr Verfahren auf das Themenfeld antisemitischer Verschwörungsmythen an. Es ist aber ohne Weiteres übertragbar auf andere inhaltliche Bereiche. (Auszug aus der veröffentlichten Laudatio)

[8] https://www.jugend-forscht.de/wettbewerbe/bundeswettbewerb-2023/preistraegerinnen-und-preistraeger.html

In alten Mathe-Büchern geblättert

Lehrbuch der Arithmetik und Algebra mit Übungs-Aufgaben für höhere Lehranstalten

Professor Dr. Th. Spieker

Verlag von August Stein, Potsdam 1895[9].
Zweiter Cursus

Abschnitt XXII – Von den Gleichungen höheren Grades

§308

Die allgemeine Form einer geordneten algebraischen Gleichung n ten Grades ist:

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + m = 0$$

worin die Coefficienten a, b, c etc. beliebige reelle Zahlen sind.

Durch Division durch den Coefficienten a des höchsten Gliedes kann dieselbe auf die schematische Form

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

gebracht werden, deren linke Seite eine algebraische Funktion von x des n ten Grades genannt, und abgekürzt mit dem Zeichen f(x) bezeichnet wird.

Sind die Coefficienten a_1, a_2, a_3 etc. mit Ausnahme von a_n gleich null, so ist die Gleichung eine reine oder binomische des Grades n:

$$x^n + a_n = 0.$$

Ist das constante Glied $a_n = 0$, so läßt sich aus der Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x = 0$$

der Faktor x absondern, woraus ersichtlich, daß dann eine Wurzel gleich null ist.

§309 – Zerlegung in Wurzelfaktoren

Ist α_1 eine Wurzel der Gleichung n ten Grades

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0,$$

so läßt sich f(x) durch den Faktor $(x - \alpha_1)$ ohne Rest dividieren. Denn da α_1 eine Wurzel ist, so muß auch

$$\alpha_1^n + a_1 \alpha_1^{n-1} + a_2 \alpha_1^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

sein. Subtrahiert man diese von der gegebenen Gleichung, so erhält man ohne Änderung der Identität eine Gleichung

[9] Die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift wurde weitgehend beibehalten, in Anlehnung an das Original wurde der Schrifttyp Mainzer Fraktur verwendet.

$$f(x) = (x^n - \alpha_1^n) + a_1(x^{n-1} - \alpha_1^{n-1}) + a_2(x^{n-2} - \alpha_1^{n-2}) + \dots + a_{n-1}(x - \alpha_1),$$

deren rechte Seite durch $(x - \alpha_1)$ ohne Rest teilbar ist. Folglich muß es auch die linke sein.

Dividiert man aber die algebraische Funktion n ten Grades durch den Faktor $(x - \alpha_1)$, so muß als Quotient eine algebraische Funktion $(n - 1)$ ten Grades erscheinen. Die gegebene Gleichung läßt sich mithin in die zwei Faktoren zerlegen:

$$(x - a_1)(x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + b_2 x^{n-3} + \dots + b_{n-1}) = 0.$$

Bemerkung. Der Fundamentalsatz, daß jede algebraische Gleichung beliebigen Grades wenigstens eine reelle oder imaginäre Wurzel hat, ist in mehrfacher Weise von verschiedenen Mathematikern, und allgemein von Gauß und Cauchy bewiesen worden. Friedr. Gauß, Prof. in Göttingen, hat dafür drei Beweise, 1799, 1814, 1815 bekannt gemacht und A. L. Cauchy einen andern im Cours d'analyse, Paris 1821. Diese Beweise liegen jedoch außerhalb der hier gezogenen Grenzen.

…

§310 – Das Coefficienten-Gesetz

Entwickelt man das Produkt der n Wurzelfaktoren einer schematisch geordneten algebraischen Gleichung n ten Grades nach Potenzen von x, so erhält man

$$x^n - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)\, x^{n-1} + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n)\, x^{n-2} -$$
$$(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \dots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n)\, x^{n-3} + \dots + (-1)^n \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots \alpha_n = 0.$$

Durch Vergleichung mit der gegebenen Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

ergiebt sich, daß die Coefficienten derselben in folgender Weise aus den Wurzeln gebildet sind:

1. Der Coeffizient a_1 ist gleich der Summe der Wurzeln mit entgegengesetztem Vorzeichen.
2. Der Coefficient a_2 ist gleich der Summe der Binionen der Wurzeln.
3. Der Coefficient a_3 ist gleich der Summe der Ternionen derselben mit entgegengesetztem Vorzeichen.
4. Der Coefficient des $(r + 1)$ ten Gliedes a_r ist gleich der Summe der Combinationen der r ten Klasse der Wurzeln mit ungeändertem oder entgegengesetztem Vorzeichen, je nachdem r gerade oder ungerade ist.
5. Das constante Glied a_n ist gleich dem Produkte aller Wurzeln mit unverändertem Vorzeichen, wenn n gerade, mit entgegengesetztem, wenn n ungerade ist.

Bemerkung. Dieser wichtige Satz rührt von dem französischen Mathematiker Franz Vieta (1540 – 1603) her.

Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 4/23

Leider wurde im Heft 4/2023 die Monatsaufgabe aus Heft 3/2023 wiederholt, deren Lösungsdiskussion im Heft 5/2023 erschien.

Monatsaufgabe[10] 6/23.

Beweisen Sie: Zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 2$ gibt es von Null verschiedene natürliche Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n$, für die $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ gilt.

Inhalt

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2022/23)

Ausgabe[11]	Nr.	Thema	Aufgabe
06/2023 (Juni 2023)	Thema 22.02	Zahlenverteilungen auf Körpern	MO541036, MO540936
05/2023 (Mai 2023)	Thema 22.01	Zahlenverteilungen auf ebene Figuren	MO620936
04/2023 (Apr. 2023)	Thema 21	Mischungsverhältnisse	MO621034, MO620934
03/2023 (März 2023)	Thema 18.02	Satz des THALES	MO621024
01+02/2023 (Jan./Feb. 23)	Thema 20	Rechnen mit großen Zahlen	MO620923
12/2022 (Dez. 2022)	Thema 19	Maximale Flächeninhalte	MO620924
11/2022 (Nov. 2022)	Thema 09.2	Pythagoreische Zahlentupel	MO621012
10/2022 (Okt. 2022)	Thema 18.01	Satz des THALES	MO621014
09/2022 (Sep. 2022)	Thema 17	Der größte gemeinsame Teiler	MO610931

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[10] Lösungseinsendungen an norman.bitterlich@t-online.de sind bis 31.07.2023 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

[11] Alle Hefte sind als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter http://www.kzm-sachsen.de/html/mathekost.html erhältlich.