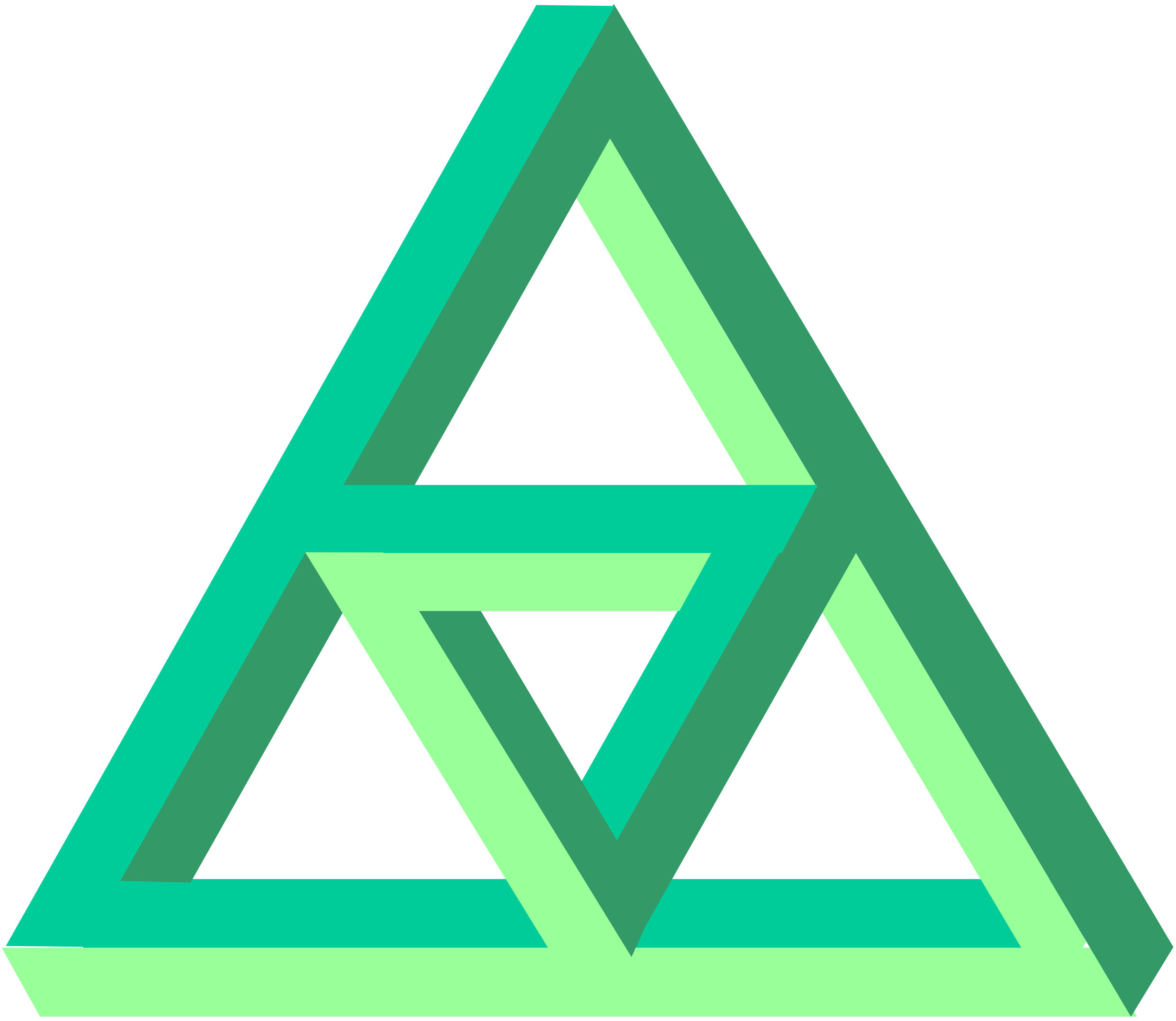
Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 10/2025 (Oktober 2025) 24. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Wir vertiefen noch einmal Aufgaben mit rationalen Zahlen. Die Aufgabe **MO641041** mit doppelrunden Dezimalzahlen führen uns zur Diskussion der Möglichkeit, mittels Taschenrechner aus einem Dezimalbruch einen passenden gewöhnlichen Bruch zu ermitteln. Doch auch in der Geschichte der Mathematik waren reguläre Zahlen im Sexagesimalsystem um 3000 Jahre v. Chr. von Bedeutung.

Wir beschäftigen uns im Zusammenhang mit der Aufgabe **KZM-1-5B** mit Fakultäten und untersuchen allgemeine Aussagen zu rationalen und irrationalen Zahlen in entsprechenden Olympiade-Aufgaben.

Wir informieren über den **Wettbewerb „Jugend forscht“**. Mit einer statistischen Übersicht zu den Wettbewerbsprojekten im Fachgebiet Mathematik/Informatik wollen wir zur Teilnahme anregen.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 33.2 – Rationale Zahlen[3]

Aufgabe 33.05 – MO641041. Eine reelle Zahl z heiße doppelrunder Dezimalbruch der Länge n, falls sowohl z als auch $\frac{1}{z}$ in der üblichen Dezimaldarstellung höchstens n Stellen nach dem Komma benötigt.

Wie viele positive doppelrunde Dezimalbrüche der Länge n gibt es in Abhängigkeit von n?

Lösungshinweise: Damit eine reelle Zahl x eine endliche Dezimaldarstellung hat, muss sie eine rationale Zahl sein und darf in ihrer vollständig gekürzten Form als Quotient ganzer Zahlen im Nenner keine Primfaktoren verschieden von 2 und 5 aufweisen (denn es muss möglich sein, die Zahl x mit einer geeigneten Zehnerpotenz zu multiplizieren, um eine ganze Zahl zu erhalten).

Schreiben wir diesen Nenner als $2^k \cdot 5^l$ mit ganzzahligen Exponenten $k, l \geq 0$, so entspricht dabei die größere der beiden Zahlen k und l der Anzahl der benötigten Nachkommastellen in der Dezimaldarstellung von x (denn dies ist der Exponent der kleinsten Zehnerpotenz, deren Produkt mit x eine ganze Zahl ergibt). Ein positiver doppelrunder Dezimalbruch z der Länge n hat damit in seiner vollständig gekürzten Form sowohl im Zähler als auch im Nenner ein Produkt aus höchstens n Faktoren 2 und höchstens n Faktoren 5. Wir haben damit $z = 2^a \cdot 5^b$ mit ganzen Zahlen $-n \leq a \leq n$ und $-n \leq b \leq n$, womit sich $(2n+1)^2$ als gesuchte Anzahl doppelrunder Dezimalbrüche ergibt. ❑

Ergänzung[4]: Die Eigenschaft rationaler Zahlen, in der Dezimalbruchdarstellung nur endliche oder periodische Ziffernfolgen nach dem Komma zu zeigen, können wir nutzen, um eine gegebene Dezimaldarstellung in einen (ggf. näherungsweise) gewöhnlichen Bruch umzuwandeln. Ist die Darstellung endlich (wie zum Beispiel bei Taschenrechneranzeige unumgänglich), so können wir die Ziffernfolge nach dem Komma als einen Zähler Z und die dazu passende Zehnerpotenz als Nenner N wählen. Mit $Z < N$ gibt es stets eine ganze Zahl k mit $k \cdot Z \leq N < (k+1) \cdot Z$. Bilden wir den Kehrwert von $\frac{Z}{N}$ und betrachten davon nur den gebrochenen Teil, so erhalten wir einen Bruch $\frac{Z_1}{N_1}$ mit $Z_1 = N - k \cdot Z < Z$ und $N_1 = Z < N$. Diesen Prozess können wir fortsetzen, bis wir $Z_n = 0$ erhalten. Da aber bei jedem Schritt die Zähler und Nenner kleiner werden, können wir eventuell bereits früher den „Rest-"Dezimalbruch als gewöhnlichen Bruch erkennen (um dann den Ausgangsbruch leicht zu ermitteln).

---

[3] s. Teil 1 in Heft 06/2025.

[4] Nach: Brockmeyer, H. Umwandlung von Dezimalbrüchen in Näherungsbrüche mit Hilfe eines Taschenrechner. MNU 46/1 (1995) S. 22.

Betrachten wir zum Beispiel den periodischen Dezimalbruch $0,\overline{714285}$. Wie bekannt können wir dafür $\frac{714285}{999999}$ schreiben und finden durch (durchaus mühseliges) vollständiges Kürzen den Bruch $\frac{5}{7}$. Zu gleichem Ergebnis kommen wir aber auch mit dem Kehrwert von $\frac{714285}{1000000}$, also 1,4000014, indem wir die Näherung 1,4 leicht als $\frac{7}{5}$ erkennen. Zurück gerechnet geben wir für den gesuchten Bruch $\frac{7}{5}$ an. Offenbar genügen sogar die Nachkommastellen 0,7142, um diesen Bruch zu vermuten.

Wollen wir nun zum Beispiel für 0,538461… einen passenden echten Bruch angeben, erhalten wir für den Kehrwert 1,857144… Noch lässt sich kein passender Bruch erkennen, also bilden wir zu 0,857144 noch einmal den Kehrwert und sehen beim Ergebnis, dass 1,166665… durch $\frac{7}{6}$ angenähert werden kann. Rückwärts gerechnet erhalten wir nacheinander $\frac{6}{7}$, $\frac{13}{7}$ und $\frac{7}{13}$.

Gehen wir von einem echten Bruch aus, so führt das Verfahren auf eine Kettenbruchdarstellung, für das Beispiel $\frac{73}{97} = 0.75257731958 \ldots$ auf

$$\frac{73}{97} = \frac{1}{1+\frac{24}{73}} = \frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{24}}}$$

Aus einer Kettenbruchdarstellung lassen sich (theoretisch beweisbar) gute Näherungen für den Ausgangsbruch erzeugen, wenn die Darstellung abgebrochen wird. Dieser Effekt führt dazu, dass wir auch für die abgekürzte Dezimaldarstellung 0.752577 den passenden echten Bruch finden: Kehrwert 1.328767, Kehrwert zu 0.328767 ergibt 3.041667, nochmals Kehrwert zu 0,041667 ergibt 23.999808. Diesen Wert runden wir auf den ganzzahligen Teil 24. Wir erkennen, dass wir mit den Vorkommastellen offenbar die Zahlen der Kettenbruchdarstellung gefunden haben: 1 – 3 – 24. Der Nachweis der Allgemeingültigkeit des Verfahrens einschließlich einer Abschätzung des zulässigen Fehlers beim Runden ist eine lohnende Untersuchung für den Umgang mit Kettenbrüchen.

Interessant ist diese Methode, wenn wir irrationale Zahlen durch Brüche darstellen wollen. Gehen wir von $\pi \approx 3.1415926$ aus, finden wir schon nach dem zweiten Schritt die Kettenbruch-Nenner 3 – 7 – 16, gleichbedeutend mit dem Bruch $3+\frac{1}{7+\frac{1}{16}} = 3+\frac{16}{113} = \frac{355}{166}$. Also finden wir die Näherung $\pi \approx \frac{355}{113} \approx 3.1415929$ (die schon Zu Chongzhi[5] angegeben hat).

[5] chinesischer Mathematiker (430 – 500 n. Chr.), ermittelte einen Näherungswert für π mittels eines 12.288 (= 2^{12} x 3) seitigen Polygons.

Auch für die Aufgabe **MO631034**[6] beruht der Lösungsansatz auf der Darstellung rationaler Zahlen als Quotient von ganzen Zahlen mit nichtnegativem Nenner.

Eine Vielzahl von Aufgaben der MO zu dieser Thematik beschäftigt sich grundsätzlich mit der Unterscheidung von rationalen und irrationalen Zahlen. Dabei sind zudem Fertigkeiten im Koordinatensystem (s. Thema 31) oft hilfreich.

Aufgabe 33.06 – MO601033. Einen Punkt im kartesischen Koordinatensystem nennen wir rational, wenn beide Koordinaten rationale Zahlen sind. Eine Gerade nennen wir rational, wenn sie einer Gleichung $u \cdot x + v \cdot y = w$ mit ganzen Zahlen u, v und w genügt, wobei u und v nicht gleichzeitig null sein dürfen. Wir betrachten nun den Einheitskreis, beschrieben durch die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$.

a) Weisen Sie nach, dass jede rationale Gerade, die den Einheitskreis nicht tangiert, mit dem Kreis entweder keinen oder genau 2 gemeinsame rationale Punkte hat.
b) Zeigen Sie, dass jeder von (−1, 0) verschiedene rationale Punkt des Einheitskreises auf einer rationalen Geraden durch den Punkt (−1, 0) liegt. Bestimmen Sie anschließend die Koordinaten dieses rationalen Punktes in Abhängigkeit von den Parametern v und w der Gleichung $u \cdot x + v \cdot y = w$ der zugehörigen rationalen Geraden.
c) Zeigen Sie: Zu jedem Zahlentripel (a, b, c) nichtnegativer ganzer Zahlen mit $a^2 + b^2 = c^2$ und einander teilerfremden a und b, wobei b gerade ist, existieren zwei teilerfremde ganze Zahlen v und w mit $0 \leq w < v$ derart, dass $a = v^2 - w^2$, $b = 2vw$ und $c = v^2 + w^2$ gilt.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Gegeben sei eine rationale Gerade, die den Einheitskreis nicht tangiert. Diese Gerade hat dann entweder keine oder zwei Schnittpunkte mit dem Kreis. Gibt es dabei keine rationalen Schnittpunkte, so ist der Nachweis bereits erbracht. Wir nehmen daher an, dass die Gerade einen rationalen Schnittpunkt mit dem Kreis hat. Dann gibt es genau einen weiteren Schnittpunkt, und von diesem müssen wir zeigen, dass er rational ist.

Die rationale Gerade genüge der Gleichung $u \cdot x + v \cdot y = w$. Für $v = 0$ ist die Gerade parallel zur y-Achse und die beiden Schnittpunkte mit dem Einheitskreis sind symmetrisch zur x-Achse, also beide rational.

Es sei daher $v \neq 0$. Stellen wir die Geradengleichung nun nach $v \cdot y$ um, ergibt sich $v \cdot y = w - u \cdot x$. Einsetzen in die mit v^2 multiplizierte Kreisgleichung führt zu $v^2x^2 + (w - ux)^2 = v^2$. Durch äquivalente Umformungen erhalten wir

$$(v^2 + u^2) \cdot x^2 - 2wux + w^2 - v^2 = 0\,,$$

[6] s. Heft 08/2024.

mit $v^2 + u^2 > 0$ eine echt quadratische Gleichung in x, deren Lösungen x_1 und x_2 die x-Werte der beiden Schnittpunkte sein müssen und deren Koeffizienten ganzzahlig sind. Nach dem Satz von VIETA gelten die Gleichungen

$$x_1 + x_2 = \frac{2wu}{v^2 + u^2} \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{w^2 - v^2}{v^2 + u^2} \; .$$

Da wir schon wissen, dass eine der Nullstellen rational ist, folgt daraus, dass die andere Nullstelle auch rational ist. Der y-Wert des zweiten Schnittpunktes ergibt sich durch Einsetzen des eben gewonnenen x-Wertes in die umgestellte Geradengleichung $y = \frac{w-u\cdot x}{v}$ und ist damit ebenfalls rational.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Der Punkt $A(-1,0)$ liegt offensichtlich auf dem Einheitskreis. Ist nun $B(b_x, b_y)$ ein von A verschiedener rationaler Punkt des Einheitskreises, so gilt $b_x \neq -1$, und die Gerade durch A und B wird durch die Geradengleichung

$$y = \frac{b_y}{b_x + 1} \cdot (x + 1)$$

beschrieben. Die Zahl $\frac{b_y}{b_x+1}$ ist dabei rational, und wir können $\frac{b_y}{b_x+1} = \frac{m}{n}$ mit ganzen Zahlen m, n und $n \neq 0$ schreiben. Die Geradengleichung lässt sich damit umformen zu $-m \cdot x + n \cdot y = m$.

Zusammenfassend liegt damit jeder von A verschiedene rationale Punkt des Einheitskreises auf einer rationalen Geraden durch den Punkt A, die den Einheitskreis nicht tangiert. Insbesondere können wir uns deshalb auch auf die Betrachtung der rationalen Schnittpunkte solcher Geraden mit dem Einheitskreis beschränken.

Es sei daher $u \cdot x + v \cdot y = w$ die Geradengleichung einer rationalen Geraden durch A, die den Einheitskreis nicht tangiert. Da A ein Punkt dieser Geraden ist, folgt $w = -u$ bzw. $u = -w$. Die Geradengleichung wird zu $-wx + vy = w$.

Für $v = 0$ ist diese Gerade parallel zur y-Achse und damit tangential am Kreis. Somit gilt $v \neq 0$. Sind dabei v und w Vielfache einer ganzen Zahl $c \neq 0$, so lässt sich diese Gleichung durch c teilen. Wir können daher ohne Einschränkung v und w als teilerfremd mit $v > 0$ annehmen.

Die Überlegungen zur allgemeinen Geradengleichung $u \cdot x + v \cdot y = w$ aus Aufgabenteil a) behalten weiterhin ihre Gültigkeit. Insbesondere gilt, dass das Produkt der x-Koordinaten der Punkte A und B gleich

$$\frac{w^2 - v^2}{v^2 + u^2} = \frac{w^2 - v^2}{v^2 + w^2}$$

sein muss, die x-Koordinate von B hat also den Wert $\frac{v^2-w^2}{v^2+w^2}$. Einsetzen in obige Gleichung liefert als entsprechenden y-Wert von B

$$\frac{1}{v}\cdot\left(w-u\cdot\frac{v^2-w^2}{v^2+w^2}\right)=\frac{1}{v}\cdot\left(w+w\cdot\frac{v^2-w^2}{v^2+w^2}\right)=\frac{w}{v}\cdot\left(1+\frac{v^2-w^2}{v^2+w^2}\right)=$$
$$=\frac{w}{v}\cdot\frac{2\cdot v^2}{v^2+w^2}=\frac{2vw}{v^2+w^2}.$$

Der Punkt B lässt sich also darstellen als $B\left(\frac{v^2-w^2}{v^2+w^2},\frac{2vw}{v^2+w^2}\right)$ mit teilerfremden ganzen Zahlen v und w mit $v>0$. Gemeinsam mit dem Punkt $A(-1,0)$ sind so alle rationalen Punkte auf dem Einheitskreis beschrieben.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Es seien a,b und c nichtnegative ganze Zahlen mit $a^2+b^2=c^2$ derart, dass a und b zueinander teilerfremd sind und b gerade ist. Wir betrachten zunächst den Fall $b=0$. Weil a zu b teilerfremd ist, folgt $a=1$ und somit $c=1$. Die Zahlen $v=1$ und $w=0$ haben dann die gewünschten Eigenschaften.

Nun sei $b>0$. Dann ist auch $c>0$, und $\left(\frac{a}{c},\frac{b}{c}\right)$ ist ein von (−1, 0) verschiedener rationaler Punkt des Einheitskreises. Gemäß Aufgabenteil b) gibt es also teilerfremde ganze Zahlen v und w mit $v>0$ und

$$\frac{a}{c}=\frac{v^2-w^2}{v^2+w^2}\quad,\quad\frac{b}{c}=\frac{2vw}{v^2+w^2}$$

Wegen $b,c>0$ ist mit v auch w positiv, und aus den beiden Gleichungen folgt durch Division

$$\frac{a}{\frac{1}{2}b}=\frac{v^2-w^2}{vw}.$$

Da v und w teilerfremd sind, ist v^2-w^2 zu v, zu w und damit auch zu $v\cdot w$ teilerfremd. Weil auch a zu $\frac{b}{2}$ teilerfremd ist, folgt aus der Eindeutigkeit der Bruchdarstellung von positiven rationalen Zahlen als Quotient zweier teilerfremder positiver Zahlen, dass $a=v^2-w^2$ und $\frac{b}{2}=v\cdot w$, also $b=2\cdot vw$ ist. Damit folgt dann direkt $c=v^2+w^2$. Weil b gerade ist und a teilerfremd zu b, muss a ungerade sein und deshalb $a>0$ gelten. Aus $a=v^2-w^2$ folgt also $w<v$. Die Zahlen v und w haben also die gewünschten Eigenschaften. ❑

Aufgabe 33.06 – MO180922. In einer Wiederholungsstunde über Zahlbereiche werden u.a. folgende Aussagen gemacht:

(1) Das Produkt zweier verschiedener irrationaler Zahlen ist stets wieder eine irrationale Zahl.
(2) Die Summe zweier verschiedener irrationaler Zahlen ist stets wieder eine irrationale Zahl.
(3) Die Summe einer rationalen und einer irrationalen Zahl ist stets eine irrationale Zahl.

Man entscheide von jeder dieser Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist!

Lösungshinweise: Die Zahl $\sqrt{2}$ und die von ihr verschiedene Zahl $\sqrt{8}$ sind irrational, ihr Produkt $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$ ist dagegen rational. Aussage (1) ist also falsch.
Es sind $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$ zwei verschiedene irrationale Zahlen. Ihre Summe ist 0. Das ist eine rationale Zahl. Aussage (2) ist also falsch.
Angenommen, es gäbe eine rationale Zahl r und eine irrationale Zahl x, deren Summe eine rationale Zahl wäre. Dann gäbe es ganze Zahlen a, b, c, d mit $b \neq 0$ und $d \neq 0$, für die gilt

$$r = \frac{a}{b} \;\; ; \;\; r + x = \frac{c}{d} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc - ad}{bd}$$

Damit ergibt sich der Widerspruch, dass x rational wäre. Damit ist bewiesen, dass Aussage (3) wahr ist. ❑

Aufgabe 33.07 – MO290934. Beweisen Sie, dass es zu je zwei beliebigen rationalen Zahlen a, b mit $a < b$ eine rationale Zahl x und eine irrationale Zahl y gibt, für die $a < x < y < b$ gilt!

Lösungshinweise: Wir wählen $x = a + \frac{1}{2}\cdot(b-a)$ und $y = a + \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot(b-a)$. Dann ist wegen $b - a > 0$ und $0 < \frac{1}{2} < \frac{1}{2}\sqrt{2}$ auch

$$a < a + \frac{1}{2}\cdot(b-a) = x < a + \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot(b-a) = y < a + 1\cdot(b-a) = b$$

Da a und b rationale Zahlen sind, ist auch x eine rationale Zahl. Weil dagegen $\sqrt{2}$ irrational ist, sind auch $\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot(b-a)$ und somit y irrational. ❑

Aufgabe 33.08 – MO330945/MO331045. Bei Verwendung eines kartesischen Koordinatensystems werde ein Punkt der Ebene ”rational” genannt, wenn seine beiden Koordinaten rationale Zahlen sind; er werde ”irrational” genannt, wenn seine beiden Koordinaten irrationale Zahlen sind; er werde ”gemischt” genannt, wenn eine seiner Koordinaten rational und die andere irrational ist.

a) Gibt es in der Ebene Geraden, die nur Punkte einer Sorte enthalten? Ermitteln Sie die Antwort auf diese Frage für jede der drei Sorten ”rational”, ”irrational”, ”gemischt”!

b) Gibt es in der Ebene Geraden, in denen aus genau zwei Sorten (mindestens) je ein Punkt enthalten ist? Ermitteln Sie die Antwort auf diese Frage für jede Zusammenstellung von zwei der drei Sorten!
c) Gibt es in der Ebene Geraden, in denen aus jeder der drei Sorten (mindestens) je ein Punkt enthalten ist?

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Es kann keine Gerade geben, die nur aus rationalen oder irrationalen Punkten besteht: Jede Gerade, die nicht parallel zur y-Achse verläuft, enthält für jede reelle Zahl x einen Punkt mit dieser x-Koordinate, also insbesondere Punkte mit rationaler und Punkte mit irrationaler x-Koordinate. Und für jede Parallele zu y-Achse gilt dieses Argument entsprechend mit den y-Koordinaten.

Auch kann keine Gerade nur gemischte Punkte enthalten: Gäbe es eine solche, so kann sie nicht parallel zur x-Achse verlaufen, denn sonst wäre entweder für alle Punkte auf dieser Geraden die y-Koordinate rational, oder für alle irrational, während sowohl Punkte mit rationaler als auch mit irrationaler x-Koordinate auf ihr liegen, also auf jeden Fall auch ein rationaler bzw. ein irrationaler Punkt. Analog schließen wir aus, dass es sich um eine Gerade handelt, die parallel zur y-Achse liegt.

Für jede sonstige Gerade aber durchlaufen sowohl die x- als auch die y-Koordinaten der auf ihr liegenden Punkte alle reellen Zahlen, wobei jede nur genau einmal (als x- und einmal als y-Koordinate) angenommen wird. Lägen auf ihr nur gemischte Punkte, so müsste jeder Punkt mit irrationaler x-Koordinate eine rationale y-Koordinate besitzen, so dass es mindestens so viele rationale wie irrationale reelle Zahlen geben müsste. Tatsächlich sind aber die irrationalen Zahlen überabzählbar, während die rationalen nur abzählbar sind, was ein Widerspruch zur gerade gewonnenen Feststellung ist. Also gibt es keine Gerade, die nur aus gemischten Punkten besteht.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Für jede Kombination gibt es solche Geraden: Auf der Geraden $y = 0$ liegen ausschließlich rationale Punkte (die mit rationaler x-Koordinate) und gemischte (die mit irrationaler x-Koordinate). Auf der Geraden $y = \sqrt{2}$ liegen ausschließlich irrationale Punkte (die mit irrationaler x-Koordinate) und gemischte (die mit rationaler x-Koordinate). Und auf der Geraden $y = x$ liegen ausschließlich rationale Punkte (die mit rationaler x-Koordinate) und irrationale (die mit irrationaler x-Koordinate).

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Auch solche Geraden gibt es, z.B. $y = \sqrt{2} \cdot x$. Auf dieser Geraden liegt der rationale Punkt (0,0), der gemischte Punkt $(1, \sqrt{2})$ und der irrationale Punkt $(\sqrt{3}, \sqrt{6})$. ❑

Aufgabe 33.09 – MO341035. Hat man in der Ebene ein kartesisches Koordinatensystem eingeführt, so werde ein Punkt der Ebene genau dann ein rationaler Punkt genannt, wenn seine beiden Koordinaten rationale Zahlen sind; er werde genau dann ein irrationaler Punkt genannt, wenn seine beiden Koordinaten irrationale Zahlen sind; er werde genau dann ein gemischter Punkt genannt, wenn eine seiner Koordinaten rational, die andere irrational ist.

a) Gibt es eine Gerade, auf der sich von jeder der drei Sorten jeweils mehr als ein Punkt befindet?
b) Für jede der drei Sorten beantworte man folgende Frage: Gibt es eine Gerade, auf der sich von dieser Sorte genau ein Punkt, dagegen von jeder der beiden anderen Sorten jeweils mehr als ein Punkt befindet?

Lösungshinweise: Wir zeigen zuerst: Befinden sich auf einer Gerade mindestens zwei rationale Punkte, dann enthält diese Gerade keine irrationalen oder keine gemischten Punkte.

Beweis: Seien (x_1, y_1) und (x_2, y_2) zwei verschiedene rationale Punkte, die auf der Geraden liegen. Wir führen nun eine Fallunterscheidung durch:

1. Fall: $x_1 = x_2$. Dann verläuft die Gerade parallel zur y-Achse und jeder Punkt auf der Gerade besitzt die gleiche x-Koordinate. Also hat jeder Punkt mindestens eine rationale Koordinate, sodass es auf dieser Geraden keine irrationalen Punkte gibt.

2. Fall: $y_1 = y_2$. Dann verläuft die Gerade parallel zur x-Achse, sodass alle Punkte auf ihr die gleiche – eine rationale – y-Koordinate besitzen und es wieder auf dieser Geraden keine irrationalen Punkte gibt.

3. Fall: $x_1 \neq x_2$ und $y_1 \neq y_2$. Dann verläuft die Gerade weder parallel zur x- noch zur y-Achse und es gibt reelle Zahlen $m \neq 0$ und n, sodass die Punkte (x, y) auf der Geraden alle die Gleichung $y = m \cdot x + n$ erfüllen. Dabei sind jedoch $m = \frac{y_2 - \cdot y_1}{x_2 - x_1}$ und $n = y_1 - m \cdot x_1$ beide rational, sodass für rationale x auch $y = m \cdot x + n$ rational ist. Umgekehrt ist aber auch für jedes rationale y auch $x = \frac{y-n}{m}$ rational, sodass es auf der Geraden keine gemischten Punkte gibt.

Mit dieser Vorbemerkung können wir die Frage aus Aufgabenteil a) sowie die Fragen aus Aufgabenteil b), die sich auf die Sorten gemischter bzw. irrationaler Punkte beziehen, leicht negativ beantworten, da in all diesen Situationen jeweils mindestens zwei rationale Punkte auf der Geraden liegen müssten, was dazu führt, dass eine der beiden anderen Sorten nicht auf der Gerade vertreten sein kann.
Es bleibt noch der Fall zu betrachten, ob es eine Gerade gibt, die genau einen rationalen und jeweils mindestens zwei gemischte und irrationale Punkte enthält.

Dies ist der Fall, wie etwa die Gerade, die durch die Gleichung $y = \sqrt{2} \cdot x$ beschrieben wird, zeigt. Diese enthält nämlich den rationalen Punkt $(0,0)$, die gemischten Punkte $(\pm 1, \pm\sqrt{2})$ und die irrationalen Punkte $(\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{6})$, wobei jeweils in der x- und y-Koordinate das gleiche Vorzeichen zu wählen ist. ❑

Aufgabe 33.10 – MO321041. Gibt es in einer Ebene mit einem x,y-Koordinatensystem eine Kreislinie, die keinen Punkt hat, für den beide Koordinaten rationale Zahlen sind?

Lösungshinweise: Der Kreis um den Koordinatenursprung mit Radius $\sqrt[4]{3}$ ist ein solcher. Die Koordinaten aller Punkte auf diesem erfüllen die Gleichung $x^2 + y^2 = \sqrt[4]{3}^2 = \sqrt{3}$. Wären sowohl x als auch y rational, wäre auch $x^2 + y^2$ rational, im Widerspruch zur Irrationalität von $\sqrt{3}$. Also kann kein Punkt dieser Kreisline nur rationale Koordinaten haben. ❑

Aufgabe 33.11 – MO101031

a) Beweisen Sie folgenden Satz!
   Addiert man zu einer ganzen Zahl k das Quadrat der Hälfte ihres unmittelbaren Vorgängers, so entsteht das Quadrat einer rationalen Zahl.
b) Nutzen Sie eine bei diesem Beweis erhaltene Gleichung, um vier voneinander verschiedene pythagoreische Zahlentripel zu finden!

Anmerkung: Ein pythagoreisches Zahlentripel (x, y, z) ist ein geordnetes Tripel dreier von Null verschiedener natürlicher Zahlen x, y, z mit der Eigenschaft $x^2 + y^2 = z^2$. Zwei derartige Tripel heißen genau dann voneinander verschieden, wenn nicht eines von ihnen aus dem anderen dadurch erhalten werden kann, dass man x, y und z mit einer von Eins verschiedenen natürlichen Zahl multipliziert oder dass man x mit y vertauscht oder dass man beides durchführt.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Sei k eine ganze Zahl. Dann ist

$$k + \left(\frac{k-1}{2}\right)^2 = \frac{4k + (k-1)^2}{4} = \frac{k^2 - 2k + 1 + 4k}{2^2} = \frac{k^2 + 2k + 1}{2^2}$$
$$= \left(\frac{k+1}{2}\right)^2$$

Da der Ausdruck in der Klammer rational für rationales k ist, ist die gesuchte Quadratzahl gefunden.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Ist $k = n^2$ eine Quadratzahl, so erhalten wir

$$n^2 + \left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2$$

bzw. nach Multiplikation mit 4 die Gleichung

$$(2n)^2 + (n^2-1)^2 = (n^2-1)^2,$$

sodass wir mit $(x, y, z) = (2n, n^2 - 1, n^2 + 1)$ ein pythagoräisches Zahlentripel erhalten. Setzen wir hierin für n die Zahlen 3; 4; 5 und 6 ein, erhalten wir die paarweise voneinander verschiedenen pythagoräischen Tripel (6; 8; 10) , (8; 15; 17), (10; 24; 26) und (12; 35; 37). ❑

Bemerkung: Die Definition der Verschiedenheit ist mit seiner Einschränkung auf natürliche "Streckungsfaktoren" ungünstig, da dann z.B. auch die Tripel (6; 8; 10) und (9; 12; 15) nach dieser Definition voneinander verschieden wären, obwohl beide nicht vom Tripel (3; 4; 5) verschieden sind.

Sehr ähnlich dazu sind auch die folgenden Aufgabenstellungen.

Aufgabe 33.12 – MO381024. Beweisen Sie: Zu jeder rationalen Zahl a existiert ein Paar (x, y) von rationalen Zahlen, so dass $x^2 = y^2 + a$ gilt.

Lösungshinweise: Ein derartiges Paar (x, y) können wir für jedes a folgendermaßen festlegen: Setzen wir $y = \frac{a-1}{2}$, so bedeutet dies für x

$$x^2 = y^2 + a = \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 + a = \frac{a^2 - 2a + 1 + 4a}{4} = \frac{a^2 + 2a + 1}{4} = \left(\frac{a+1}{2}\right)^2,$$

also $x = \frac{a+1}{2}$. Diese Zahlen x und y sind für rationale Zahlen a selbst wieder rational und erfüllen die geforderte Gleichung. ❑

Aufgabe 33.13 – MO470931. Beweisen Sie, dass es unendlich viele positive ganze Zahlen a gibt, für welche die Zahl $a + 0{,}25$ das Quadrat einer rationalen Zahl ist.

Lösungshinweise: Für jede positive, ganze Zahlen k ist $a = k \cdot (k + 1)$ eine Zahl, die den Bedingungen der Aufgabe erfüllt, denn es gilt

$$a + 0{,}25 = k \cdot (k + 1) + \frac{1}{4} = \frac{k^2 + 2k + 1}{4} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^2$$

Da $k \cdot (k + 1)$ unendlich viele Werte annehmen kann, ist damit die Existenz unendlich vieler geeigneter Zahlen a nachgewiesen[7]. ❑

Fakultät – Umgang mit großen Zahlen (Teil 2[8])

Aufgabe – MOV11035[9]. Unter der Zahl $n!$, gelesen „n Fakultät", versteht man das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ aller natürlichen Zahlen von 1 bis n. So ist z.B. $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

[7] In den Lösungshinweisen der Aufgabenkommission wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass die Lösungsdarstellung explizit die Existenz unendlich vieler Zahlen zeigt.

[8] Teil 1 – siehe Heft 09/2025

[9] Die Mathematik-Olympiade begann vor der offiziellen Nummerierung mit zwei Vorolympiaden.

Wieviel Endnullen hat die Zahl 50! (50 Fakultät)? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösungshinweise: Es sei x die gesuchte Anzahl der Endnullen der Zahl 50! Dann gilt $50! = z \cdot 10^x$, wobei z eine natürliche Zahl ist, die nicht auf 0 endet. Wegen $10^x = 2^x \cdot 5^x$ ist die Anzahl der Endnullen gleich der kleineren unter den Anzahlen der Faktoren 2 bzw. 5, die in der Zahl 50! enthalten sind. Da jede zweite natürliche Zahl gerade, aber nur jede fünfte natürliche Zahl durch 5 teilbar ist, enthält die Zahl 50! mehr Faktoren 2 als Faktoren 5. Mithin ist die gesuchte Anzahl der Endnullen gleich der Anzahl der Faktoren 5, die 50! enthält.

- Nun gibt es unter den natürlichen Zahlen von 1 bis 50 genau zwei durch $25 = 5^2$ teilbare Zahl, nämlich 25 und 50,
- und unter den verbleibenden 48 Zahlen genau $10 - 2$ durch 5 teilbare Zahlen, nämlich die Zahlen $n \cdot 5$ mit $1 \leq n \leq 50$ und $n \neq 25, 50$.

Daher enthält die Zahl 50! wegen $2 \cdot 2 + 8 = 12$ genau 12 Faktoren 5 und endet somit auf genau 12 Nullen. ❑

Aufgabe MO130914. Unter $n!$ (gelesen n-Fakultät) versteht man das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n; d.h., es gilt $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n.$

Man ermittle für $n = 1000$ die Anzahl der Nullen, auf die die Zahl $n!$ endet.

Lösungshinweise: Mit der Argumentation von oben ist die gesuchte Anzahl der Endnullen gleich der Anzahl der Faktoren 5, die 1000! enthält.

- Nun gibt es unter den natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 genau eine durch $625 = 5^4$ teilbare Zahl,
- unter den restlichen 999 Zahlen genau $8 - 1$ durch $125 = 5^3$ teilbare Zahlen, nämlich die Zahlen $n \cdot 125$ mit $1 \leq n \leq 8$ und $n \neq 5$;
- unter den übrigen 992 Zahlen genau $40 - 8$ durch $25 = 5^2$ teilbare Zahlen, nämlich die Zahlen $n \cdot 25$ mit $1 \leq n \leq 40$ mit $n \neq 5, 10, 15, \ldots, 40$, d.h. $n \neq k \cdot 5$ $(k = 1, \ldots, 8)$;
- schließlich unter den verbleibenden 960 Zahlen genau $200 - 40$ durch 5 teilbare Zahlen, nämlich die Zahlen $n \cdot 5$ mit $1 \leq n \leq 200$ und $n \neq k \cdot 5$ $(k = 1, \ldots, 40)$.

Daher enthält die Zahl 1000! Wegen

$$4 + 3 \cdot (8 - 1) + 2 \cdot (40 - 8) + (200 - 40) = 200 + 40 + 8 + 1 = 249$$

genau 249 Faktoren 5 und endet somit auf genau 249 Nullen. ❑

Aufgabe KZM-1-5B. Für das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen schreibt man $n!$

(a) Man finde die größte ganze Zahl s, so dass $2019!$ durch 2019^s teilbar ist.

(b) Man beweise, dass die Summe der Fakultäten zweier verschiedener Zahlen größer 1 keine Fakultätszahl ergibt, dass also die Gleichung $a! + b! = c!$ für $a, b, c > 1$ keine Lösungen besitzt.
(c) Man finde alle maximal dreistelligen Zahlen, die gleich der Summe der Fakultäten ihrer Ziffern sind.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Wir verwenden die Argumentation wie oben. Es sei s die gesuchte Zahl. Dann gilt $2019! = z \cdot 2019^s$, wobei z eine natürliche Zahl ist, die teilerfremd zu 2019 ist. Wegen der Primfaktorenzerlegung $2019^s = 3^s \cdot 673^s$ ist s gleich der kleineren unter den Anzahlen der Faktoren 3 bzw. 673, die in der Zahl 2019! enthalten sind. Da jede dritte natürliche Zahl durch 3 teilbar ist, enthält die Zahl 2019! mehr Faktoren 3 als Faktoren 673. Mithin ist s gleich der Anzahl der Faktoren 673, die 2019! enthält.

Wir finden genau die drei Zahlen 673, 1346 = 673 · 2 und 2019 = 673 · 3, die den Teiler 673 beitragen. Somit ist $s = 3$ die größte Zahl mit $2019^s | \ 2019!$

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Gilt $a = b$, so reduziert sich die Gleichung auf $2 \cdot a! = c! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot c$. Wegen $a > 1$ gilt $c! \geq 4$ und deshalb $c \geq 3$. Teilen wir nun beide Seiten durch 2, so verbleibt auf der linken Seite eine vollständige Fakultät, aber auf der rechten Seite ist das Produkt keine vollständige Fakultät. Deshalb nehmen wir o.B.d.A. $a < b$ an. Offenbar gilt dann auch $b < c$, d.h. die Zahl b ist Faktor in c! Weil nun alle Faktoren von $a!$ auch unter den Faktoren in $b!$ sind, gilt

$$a! + b! = a! \cdot (1 + (a+1) \cdot \ldots \cdot b) = c!,$$

jedoch ist b in dieser Gleichung kein Teiler von c!

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Für eine einstellige Zahl n $(n > 2)$ gilt stets: $n < n!$ Folglich kann es unter den einstelligen Zahlen nur die trivialen Lösung 1 = 1! und 2 = 2! geben.

Es seien a $(a > 0)$ und b Ziffern einer zweistelligen Zahl, so dass für $n = 10a + b$ gilt: $n = a! + b!$ Keine der Ziffern ist größer als 4, da sonst n mindestens dreistellig wäre. Wäre eine Ziffer 1, so muss für ein zweistelliges n die andere Ziffer 4 sein, doch weder 14 noch 41 erfüllen die Forderung, denn $1! + 4! = 25$. Gleiches gilt für die Ziffer 2, da die Zahlen 24 und 42 ebenfalls nicht die Summe der Fakultäten ihrer Ziffern sind $(2! + 4! = 26)$. Somit bleiben nur noch die Zahlen 33, 34, 43, 44 zu prüfen, die aber ebenfalls als Lösung entfallen. Es gibt folglich keine zweistelligen Zahlen der geforderten Art.

Es seien $a\,(a > 0), b$ und c Ziffern einer dreistelligen Zahl, so dass für $n = 100a + 10b + c$ gilt: $n = a! + b! + c!$ Mindestens eine der drei Ziffern ist größer als 4, da sonst $n \leq 3 \cdot 4! \ = 72$ nicht dreistellig wäre. Keine der Ziffern ist dagegen größer als 6, da in diesem Fall n mindestens vierstellig würde. Auch die Ziffer 6 kann nicht auftreten, da dann $n \geq 6! = 720$ gelten würde und somit wenigsten eine Ziffer 7 oder größer wäre. Dies wurde bereits ausgeschlossen.

Folglich ist mindestens eine Ziffer gleich 5. Alle drei Ziffern können wegen $555 \neq 3 \cdot 5!$ nicht 5 sein. Auch zwei Fünfen sind nicht möglich, weil wegen $2 \cdot 5! = 240 \leq n \leq 2 \cdot 5! + 4! = 264$ nur die Zahl 255 möglich wäre, aber offensichtlich $255 \neq 2! \ + 2 \cdot 5! = 242$ gilt.

Folglich ist genau eine Ziffer gleich 5. Wegen $n \leq 3 \cdot 5! = 360$ kann nicht die Hunderterstelle 5 sein. Wegen $120 = 5! \leq n \leq 5! \ + 2 \cdot 4! = 168$ folgt deshalb $a = 1$. Somit bleiben die Möglichkeiten mit $b = 5$:

$$150 + c = 1! + 5! + c! = 121 + c! \ \Rightarrow \quad 29 = c! - c = c((c-1)! - 1)$$

oder mit $c = 5$:

$$105 + 10b = 1! + b! + 5! = 121 + b! \quad \Rightarrow \quad 16 = 10b - b! = b(10 - (b-1)!))$$

Wegen der Primzahleigenschaft von 29 müsste jedoch im ersten Fall $c = 1$ oder $(c \ - \ 1)! = 2$ sein. Beides führt zu keiner Lösung.

Im zweiten Fall muss b ein Teiler von 16 sein, also $b = 1, 2, 4$ oder 8. Nur $b = 4$ erfüllt die gegebene Gleichung. Folglich kann nur $n = 145$ die Aufgabe erfüllen.

Die Probe $145 = 1 + 24 + 120 = 1! + 4! + 5!$ bestätigt diese Zahl als Lösung. ❑

Bemerkung 1: Die Zahlen 1, 2, 145 und 40585 sind die einzigen natürlichen Zahlen, die gleich der Summe der Fakultäten ihrer Ziffern sind.

Bemerkung 2: Auch wenn durch die Einschränkung der Suche nach allen höchstens dreistelligen Zahlen die systematische Untersuchung aller Zahlen von 0 bis 999 praktisch und ohne rechentechnische Hilfsmittel möglich ist, sollte dies als Lösungsweg vermieden werden. Wie gezeigt, geht es darum, durch Vorüberlegung zunächst die Anzahl der zu probierenden Fälle zu reduzieren. Bleiben am Ende dann doch noch einige Fälle übrig, ist eine tabellarische Übersicht für die Korrektur zulässig.

Aufgabe MO241044. Ermitteln Sie alle diejenigen Paare $(a;\ b)$ natürlicher Zahlen, für die $a! + b! = (a + b)!$ gilt!

Lösungshinweise: Aufgrund der Symmetrie gilt allgemein, dass $(b; a)$ eine Lösung ist, wenn $(a; b)$ eine Lösung ist. Wir betrachten nachfolgend daher nur Fälle mit $a \leq b$.

Da $0! = 1$ ist, ist offensichtlich, dass $a > 0$ sein muss, denn sonst müsste $1 + b! = b!$ gelten, was nicht möglich ist. Wir wollen beweisen:

$$\prod_{k=1}^{a} k + \prod_{k=1}^{b} k = \prod_{k=1}^{a+b} k$$

Wir teilen beide Seiten durch $b!$ und erhalten

$$\frac{\prod_{k=1}^{a} k}{\prod_{k=1}^{b} k} + 1 = \frac{\prod_{k=1}^{a+b} k}{\prod_{k=1}^{b} k}$$

Wegen $b < a + b$ können wir im Fall $a < b$ die Brüche kürzen

$$\frac{1}{\prod_{k=a+1}^{b} k} + 1 = \prod_{k=b+1}^{a+b} k$$

Rechts steht eine natürliche Zahl, so dass der Bruch links auch eine natürliche Zahl ergeben muss. Das ist für $b > a$ nicht möglich. Es bleibt also nur noch der Fälle $a = b > 0$ zu untersuchen. Dann muss gelten

$$2 \cdot \prod_{k=1}^{b} k = \prod_{k=1}^{2b} k \quad \Rightarrow \quad 2 = \frac{\prod_{k=1}^{2b} k}{\prod_{k=1}^{b} k} = \prod_{k=b+1}^{2b} k$$

Das ist nur für $b = 1$ erfüllt, für größere b gilt immer $2 \cdot b! < (2a)!$ Daher ist das triviale Paar (1; 1) die einzige Lösung. ❑

Mathematik im Wettbewerb „Jugend forscht“

Der Bundeswettbewerb „Jugend forscht“ wird von der gleichnamigen Stiftung ausgerichtet [10]. Im Jahre 1965 rief der damalige Chefredakteur und Herausgeber des STERN, HENRI NANNEN, den Wettbewerb „Jugend forscht“ ins Leben, um der naturwissenschaftlich-technischen Nachwuchsforschung ein Podium für ihre Aktivitäten zu bieten. Ab 1975 ist „Jugend forscht“ ein gemeinsames Förderungswerk des Bundesministeriums für Bildung und Wissenschaft sowie des STERN. Die Schirmherrschaft hat der Bundespräsident übernommen.

Die Wettbewerbsidee ist dem ursprünglichen Anliegen treu geblieben. Alles, was in den sieben Fachgebieten[11] (FG) Arbeitswelt, Biologie, Chemie, Geo- und Raumwissenschaft, Mathematik/Informatik, Physik und Technik untersuchenswert erscheint, kann aufgegriffen, erarbeitet und schließlich in den Regionalwettbewerben präsentiert werden. Sowohl als Einzelstarter als auch in einer Gruppe bis zu drei Teilnehmenden können Mädchen und Jungen bis 14 Jahre („Jugend forscht junior“[12]) bzw. Jugendliche zwischen 15 und 21 Jahre („Jugend forscht“) starten. Die Anmeldung bis zum 30. November ist gleichermaßen die Startberechtigung – vorausgesetzt, bis zum Einsendetermin im Januar des Folgejahres wird eine maximal 15-seitige Darstellung des Projektes vorgelegt. Diese Arbeit ist zum Wettbewerb öffentlich

[10] www.jugend-forscht.de

[11] schwer klassifizierbare Themen können als interdisziplinäre Arbeiten gesondert bewertet werden.

[12] bislang als „Schüler experimentieren“ bekannt

vorzustellen: an einem Stand steht man Juroren, Gästen und den anderen Teilnehmenden Rede und Antwort.

Der Gesamteindruck aus schriftlicher Arbeit, Standpräsentation und mündlicher Darstellung entscheidet über die Preisvergabe. Wesentliche Erfolgskriterien sind: Originalität, Eigenständigkeit, Kreativität. Kaum einer geht leer aus, viele Sonderpreise sind Lohn für die Leistungen. Die Besten jedes Fachgebietes (und das können auch jeweils mehrere sein) werden zur Teilnahme am Landesausscheid eingeladen, wo sie die Chancen erhalten, als Landesbeste ins Bundesfinale zu gelangen.

Schuljahr	Teilnehmerzahl (Anmeldungen zur 1. Runde)	Patenfirma des Bundesfinales
2022/23	9.386	*Unternehmensverbände im Lande Bremen e. V. Bremen*
2023/24	10.492	*experimenta gGmbH, Heilbronn*
2024/25	10.350	*Helmut-Schmidt-Universität / Universität der Bundeswehr Hamburg*

Gesamt-Teilnehmerzahl und Patenfirma des Bundesfinales

Das **FG Mathematik/Informatik** eignet sich eigentlich gut für eine Präsentation eigener Untersuchungen, zeigt aber auch im Jahr 2025 bundesweit mit 759 Teilnehmenden (7.3%) wieder beinahe die geringste Resonanz, knapp vor dem FG Geo- und Raumwissenschaft (594 Teilnehmende, 5.7%) und deutlich weniger als zum Beispiel im FG Biologie (2.587 Teilnehmende, 25.0%) oder im FG-Technik (1.996 Teilnehmende, 19.3%).

Der Landeswettbewerb Sachsen fand am 12. April 2025 in der VDI-Garage Leipzig statt und wurde gemeinsam mit drei Patenunternehmen ausgerichtet: Porsche Leipzig GmbH, DAS Environmental Expert GmbH Dresden, BGH Edelstahlwerke GmbH Freital. Zudem ist die Siemens AG langjähriger Unterstützer des Landeswettbewerbs. Es waren 25 Jugendliche mit 20 Projekten am Start. Dazu hatten sich noch 9 Schülerinnen und Schüler mit acht Projekten in der Sparte „Jugend forscht junior“ qualifiziert. Das FG Mathematik/Informatik war mit drei Projekten „Jugend forscht“ (15.0%) und einem Projekt der Jüngeren gut vertreten.

Jeder, der sich schon einmal mit einer mathematischen Problemstellung vertieft befasst hat, sollte seine Ergebnisse auch bei „Jugend forscht“ vorstellen. Die Mühe der Präsentationsvorbereitung lohnt sich auf alle Fälle! Bei Anfrage wird gern Unterstützung bei der Themenfindung, der inhaltlichen Umsetzung und oder der außerschulischen Betreuersuche gegeben – aber jede Lehrerin und jeder Lehrer fürs Fach Mathematik ist gleichermaßen ein Ansprechpartner.

Die folgende Übersicht der Themen der sächsischen Landeswettbewerbe aus vergangenen Jahren gibt einen Eindruck über die Vielfalt der untersuchten Fragestellungen im Fachgebiet Mathematik/Informatik – auch wenn manche Projekttitel nur wenig über den Inhalt[13] verraten:

Becker, Sophie (Sächs. Landesgymn. Sankt Afra, Meißen) **Bestimmung von Mineralen in Gesteinsproben mit maschinellem Lernen**	2025
Benedix, Alexander (Student): **Integration über sphärische Dreiecke** *2. Platz; Sonderpreis c’t Magazin; Sonderpreis Studienseminar im Kerschensteiner Kolleg des Deutschen Museums in München*	2023
Benedix, Alexander (Student) **Simulation supraleitender Lager**	2024
Beyer, Henning (Rossbach-Schule, Berufl. Schulzentrum der Stadt Leipzig) **Einsatz effektiverer Transformer-Encoder** *2. Platz; Sonderpreis Elektronik, Energie- oder Informationstechnik*	2023
Goncharov, Denis (Kepler-Gymn. Chemnitz) **Modellierung der Durchschnittsgeschwindigkeit eines Radfahrers** *2. Platz; Sonderpreis Rundfunk-, Fernseh- und Informationstechnik*	2024
Jaretzki, Lennart (Rossbach-Schule, Berufl. Schulzentrum der Stadt Leipzig) **Geometrischer deep-Learning Ansatz zur Knotentheorie** *2. Platz*	2024
Li, Chenpan (Nexö-Gymn. Dresden): **C2P-Net: Zweistufige nicht-starre Punktwolkenregistrierung für die Mittelohrdiagnostik** *Landessieger, Teilnahme am Bundesfinale; Sonderpreis Elektrotechnik und Informationstechnik (FBTEI e.V.)*	2025
Lowa, Alexander/ Voigtmann, Richard (TU Dresden) **Falschinformationen erkennen mithilfe von KI** *Landessieger, Teilnahme am Bundesfinale; Sonderpreis Staatsministerium für Wirtschaft, Arbeit und Verkehr; futureSAX Sonderpreis*	2023
Riedel, Max (Nexö-Gymn. Dresden) **Analyse und Visualisierung von SingleCell-Sequenzierungen** *3. Platz; Sonderpreis Elektronik, Energie- oder Informationstechnik, Sonderpreis futureSAX*	2024
Uhlig, Emma (Kepler-Gymn. Chemnitz) **Verbreitung von Fake News — Stochastische Simulation zur Modellierung sozialer Netzwerke** *2. Preis; Sonderpreis Forschungspraktikum am Deutschen Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V. (DLR) im Institut für Datenwissenschaft Jena*	2025

[13] ausführliche Beschreibungen zu den Projekten 2024 unter https://www.jugend-forscht-sachsen.de/jugend-forscht/teilnehmer/

Das Bundesfinale des 60. Bundeswettbewerbs richtete die Stiftung Jugend forscht e.V. gemeinsam mit der HELMUT-SCHMIDT-Universität / Universität der Bundeswehr Hamburg vom 29. Mai bis 1. Juni 2025 aus. Insgesamt 167 Finalisten hatten sich mit ihren 112 Projekten während des Finales einer Expertenjury aus Wissenschaft und Forschung gestellt, darunter 20 Teilnehmende mit 16 Projekten im FG Mathematik/Informatik. Hier errang SIMON NEUENHAUSEN vom ALEXANDER-VON-HUMBOLDT-Gymnasium (Neuss/Nordrhein-Westfalen) mit seinem Projekt „Mehr Freiheit für den Mini-Computer - Open Source WLAN auf dem ESP32“ den 1. Preis. Der Finalsieg war mit einem Preisgeld von 2.500 € der KLAUS-TSCHIRA-Stiftung verbunden. Über die Siegerarbeit ist unter www.jugend-forscht.de in der Preisträgerbroschüre[14] zu lesen:

> *Was tun, wenn ein Chip viel kann, aber nicht alles erlaubt? SIMON NEUENHAUSEN wollte das nicht akzeptieren. Er nahm sich einen verbreiteten, kostengünstigen Mini-Computer vor und fand heraus, was dieser wirklich kann. Die Herausforderung bestand darin, dass die eingebaute WLAN-Funktion vom Hersteller weitgehend abgeschlossen war und sich kaum überprüfen und verändern ließ. Also analysierte der Jungforscher den Programmcode und entwickelte eine eigene, frei zugängliche Version. Damit lässt sich der Chip nutzen, um Netzwerke einzurichten, neue Anwendungen zu testen oder Sicherheitslücken zu erkennen. Die Software macht teure Spezialgeräte überflüssig. Der günstige Chip kann nun Aufgaben übernehmen, für die sonst deutlich mehr Technik nötig wäre.*

Die Jury überzeugte vor allem die systematische Vorgehensweise, die enorme fachliche Tiefe des Projekts und die Beharrlichkeit, mit der SIMON NEUENHAUSEN sein Projektziel verfolgte und erreichte. Sein fundiertes Verständnis der Mikrocontroller-Architektur beeindruckte ebenso wie die ausgezeichnete Qualität seiner fachlichen Arbeit (Auszug aus der Laudatio).

Der sächsische Teilnehmer CHENPAN LI vom MARTIN-ANDERSEN-NEXÖ-Gymnasium (Dresden) in Zusammenarbeit mit dem Nationalem Centrum für Tumorerkrankungen Dresden wurde für sein Projekt „KI schärft den Blick ins Ohr – C2P-Net: zweistufige nicht-starre Punktwolkenregistrierung für die Mittelohrdiagnostik“ mit dem 3. Preis ausgezeichnet, verbunden mit einem Preisgeld von 1.000 € von der KLAUS-TSCHIRA-Stiftung verbunden.

In alten Mathe-Büchern geblättert

Die doppelrunden Dezimalbrüche aus Aufgabe MO641041 haben in der Geschichte der Mathematik eine Bedeutung. In

[14] https://www.jugend-forscht.de/wettbewerbe/bundeswettbewerb-2025/preistraegerinnen-und-preistraeger.html

Dietmar Herrmann

Mathematik im Vorderen Orient
Geschichte der Mathematik in Altägypten und Mesoptanien

Springer-Verlag GmbH Berlin, 2019.

Kapitel 3.3 – Rechentechniken (Seiten 225ff)

wird über die Rechentechniken im Sexagesimalsystem aus der Zeit um 3000 Jahre vor Chr. berichtet, also im Zahlensystem, das mit den Zahlzeichen 1, …, 59 geschrieben wurde. Der Wert einer Zeichenfolge wurde mit den 60er-Potenzen berechnet. So entspricht der Folge (12, 23, 49)[15] der Wert

$$12 \cdot 60^2 + 23 \cdot 60^1 + 49 \cdot 60^0 = 44629.$$

Allerdings gab es für die Zahlendarstellung keinen Stellenwert wie heute im Dezimalsystem, so dass diese Zeichenfolge auch $12 \cdot 60^3 + 23 \cdot 60^0 + 49 \cdot 60^{-1} = 2.592.023{,}816\ldots$ oder anderes bedeuten konnte. Zudem gab es in der Zahlendarstellung keine Null. Heute würden wir ein Festkommaformat wählen und im ersten Beispiel (12, 23, 49; 0) und im zweiten Beispiel (12, 0, 0, 23; 49) schreiben.

Es gibt verschiedene Erklärungen für die Verwendung des Sexagesimalsystems, das uns heute noch in der Winkeleinteilung oder Zeitmessung begegnet. Ein Vorteil gegenüber dem Dezimalsystem besteht in der Teilervielfalt der Zahl 60. Während die Zahl 10 nur die vier Teiler 1, 2, 5 und 10 besitzt, sind es bei 60 insgesamt 12 Teiler. Eine Division zweier Zahlen kann damit ohne Rest durchgeführt werden, wenn der Nenner auf eine Potenz 60^k erweitert werden kann. Dies ist genau dann der Fall, wenn der Nenner nur die Primfaktoren 2, 3 und 5 enthält. Solche Zahlen werden reguläre Zahlen (des Sexagesimalsystems) genannt. Reguläre Zahlen sind abgeschlossen gegenüber der Multiplikation und Division (ähnlich wie die doppelrunden Dezimalbrüche). Da zur damaligen Zeit die Division als Multiplikation mit dem Kehrwert des Divisors ausgeführt wurden, mussten die Kehrwerte der regulären Zahlen beherrscht werden. Diese können wir heute leicht ausrechnen, beispielsweise

$$6^{-1} = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{2 \cdot 5}{2^2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{10}{60} = (0; 10),$$
$$18^{-1} = \frac{1}{2 \cdot 3^2} = \frac{2^3 \cdot 5^2}{(2^2 \cdot 3 \cdot 5)^2} = \frac{200}{3600} = \frac{180}{3600} + \frac{20}{3600} = \frac{3}{60} + \frac{20}{60^2} = (0;\ 3, 20)$$

oder

$$32^{-1} = (0; 1, 52, 30).$$

---

[15] Wir verwenden die Schreibweise in Klammern als Darstellung im Sexagesimalsystem, in der das Semikolon als (Dezimal-) Komma geschrieben wird.

Um das „Kleine Einmaleins“ mit der Basis 60 nicht lernen zu müssen, wurden Multiplikationstabellen erstellt. Es gab zur damaligen Zeit sogar Tafelwerke für Quadratzahlen und Wurzelwerte. Wesentlich für die Division waren zudem Reziprokentabellen, in denen die (endlichen) Reziprokwerte der regulären Zahlen aufgeführt wurden.

Zahl	Reziproke	Zahl	Reziproke	Zahl	Reziproke
2	30	12	5	30	2
3	20	15	4	32	1, 52, 30
4	15	16	3, 45	36	1, 40
5	12	18	3, 20	40	1, 30
6	10	20	3	45	1, 20
8	7, 30	24	2, 30	48	1, 15
9	6, 40	25	2, 24	50	1, 12
10	6	27	2, 13, 20	54	1, 6, 40

Dabei ist zu beachten, dass in der Tabelle keine Stellenwerte angegeben werden. Diese müssen entsprechend der konkreten Aufgabenstellung noch festgelegt werden. So ist für (2; 0) das Reziproke (0; 30), aber ebenso wird für (0; 2) aus der Tabelle das Reziproke (30; 0) zugeordnet.

Die Reziproken von irregulären Zahlen bereiteten offenbar größere Schwierigkeiten. Aber es gab bereits Näherungswerte, z.B. für $7^{-1} \approx (0; 8, 34, 17, 8, \dots)$, indem der zu berechnende Bruch zunächst so erweitert wurde, dass der Nenner in die Nähe einer regulären Zahl kam:

$$7^{-1} = 13 \cdot 91^{-1} \approx 13 \cdot 90^{-1} = (0; 8, 40).$$

Mit $0.1\overline{4}$ wird damit der periodische Dezimalbruch $0.\overline{142857}$ angenähert. Um diese Schwierigkeiten zu umgehen, wurden auch Tafeln für Näherungen der Reziproken von irregulären Zahlen erstellt. Aus heutiger Sicht ist es interessant, wie möglicherweise für manche Zahlen die darin enthaltenden Näherungen berechnet wurden: Für Werte, die nicht in der Reziprokentabelle enthalten sind, zerlege man den Nenner in eine Summe, die zu einem Produkt zweier Reziproken führt:

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} \cdot \frac{a}{a+b} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{b}{a}}$$

Beispiele: Gesucht wird das Reziproke von (2; 5). Da nur die Primfaktoren 2 und 5 auftreten, entsteht ein endlicher Bruch. Wir zerlegen in $a = (0; 5)$ und $b = (2; 0)$. Wir entnehmen der Reziprokentabelle $(0; 5)^{-1} = (12; 0)$. Problemlos finden wir damit für $1 + \frac{b}{a}$ den Wert $(25; 0)$. In der Reziprokentabelle können wir dafür $(0; 2, 24)$ ablesen. Die Multiplikation mit $(12; 0)$ bereitet keine Schwierigkeit:

$(2;\ 5)^{-1} = (12;0) \times (0;2,24) = (0;28,48)$. Mit Dezimalzahlen überzeugen wir uns von der Richtigkeit des Ergebnisses:

$$(2;5)^{-1} = \left(2 + \frac{5}{60}\right)^{-1} = 2.08\overline{3}^{-1} = 0.48 = \frac{28}{60} + \frac{48}{60^2} = (0;28,48).$$

Auch die Probe gelingt mit dem Verfahren. Wollen wir das Reziproke von (0; 28, 48) berechnen, setzen wir $a = (0;0,48)$ und $b = (0;28)$, so entnehmen wir einer Reziprokentabelle $(0;0,48)^{-1} = (1,15;0)$. Dann ist $1 + \frac{b}{a} = (36;0)$, dem laut Tabelle das Reziproke $(0;1,40)$ entspricht. Schließlich multiplizieren wir die beiden Brüche:

$$(0;28,48)^{-1} = (1,15;0) \times (0;1,40) = (2;5).$$

Wir führen eine Probe in Dezimalzahlen durch:

$$(0;28,48)^{-1} = \frac{1}{\frac{28}{60}+\frac{48}{60^2}} = \frac{3600}{1728} = 2.08\overline{3} = (1,15;0) \times (0;1,40) = \frac{75\cdot 100}{3600} = \frac{125}{60} = (2;5).$$

Suchen wir einen Wert für das Reziproke der irregulären Zahl 7, so könnten wir folgende Zerlegungen probieren:

Fall 1: $a = (1;0), b = (6;0)$. Dies führt zu $a^{-1} = (1;0)$ und $1 + b \cdot a^{-1} = 7$, womit also keine Lösung gefunden werden kann, weil das Reziproke von 7 noch nicht bekannt ist.

Fall 2: $a = (2;\ 0), b = (5;0)$. Dies führt zu $a^{-1} = (0;30)$ und $1 + b \cdot a^{-1} = (3;30)$. Weil das Reziproke von (3; 30) in der Tabelle nicht angegeben wird, runden wir $(3;30) \approx (3;20)$ und verwenden das zugehörige Reziproke $(0;18)$. Die Multiplikation der Reziproken $(0;30) \times (0;18) = (0;9) = \frac{9}{60} = 0.15$ ergibt eine grobe Näherung für $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$.

Fall 3: $a = (0;30), b = (6;30)$. Dies führt zu $a^{-1} = (2;0)$ und $1 + b \cdot a^{-1} = (14;0)$. Um die Tabelle zu nutzen, runden wir $(14;0) \approx (15;0)$ mit dem Reziproken $(0;4)$. Die Multiplikation der Reziproken $(2;0) \times (0;4) = (0;8) = \frac{8}{60} = 0.1\overline{3}$ ergibt eine weitere Näherung.

Monatsaufgabe 10/2025[16]

Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$. Der Punkt P auf $\overline{AC}$ teile die Strecke $\overline{AC}$ innen im Verhältnis 4 : 1, so dass $|\overline{AP}| : |\overline{PC}| = 4 : 1$ gilt, und der Punkt Q auf $\overline{AB}$ teile die Strecke $\overline{AB}$ innen im Verhältnis 3 : 2, so dass $|\overline{AQ}| : |\overline{QB}| = 3 : 2$ gilt.

Beweisen Sie, dass das Dreieck ΔPQD gleichschenklig-rechtwinklig ist.

[16] Lösungseinsendungen an bino@hrz.tu-chemnitz.de sind bis 31.10.2025 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 08/2025

Finde alle natürlichen Quadratzahlen, für die jede Permutation ihrer Ziffern wieder eine Quadratzahl ergibt!

Lösungshinweise: Trivialerweise erfüllen die einstelligen Quadratzahlen 0, 1, 4 und 9 die Bedingungen der Aufgabe. Wir untersuchen deshalb mehrstellige Zahlen. Dann darf keine Ziffer 0 sein, weil es dann eine Permutation mit einer einzelnen 0 als Endziffer gibt, was aber keine Quadratzahl ergibt. Weiterhin wissen wir, dass die Endziffer einer Quadratzahl nur 1, 4, 5, 6 oder 9 sein kann, da jede Quadratzahl einer einstelligen Zahl (Einerziffer) auf nur diese Zahlen enden kann. Dann können die gesuchten Quadratzahlen nur aus diesen Ziffern bestehen, weil jede andere Ziffer durch eine Permutation als Einerziffer auftreten würde. Außerdem ist bekannt, dass die Zahl aus den letzten beiden Ziffern (Zehner- und Einerziffer) bei Division durch 4 den Rest 0 oder 1 lassen muss.

Wir betrachten zunächst den Fall, alle Ziffern einer Quadratzahl seien gleich (und deren Permutationen verändern die Quadratzahl nicht).

Betrachten wir zunächst Quadratzahlen, die aus mindestens zwei verschiedenen Ziffern bestehen. Sie (oder eine Permutation der Ziffern) können nur auf <u>14</u>, <u>15</u>, 16, <u>19</u>, <u>45</u>, <u>46</u>, <u>49</u>, 56, <u>59</u>, 69 oder ihre Vertauschungen <u>41</u>, <u>51</u>, 61, <u>91</u>, <u>54</u>, <u>64</u>, <u>94</u>, 65, <u>95</u>, 96 enden. Jedoch entfallen die unterstrichenen Kombinationen, weil sie oder ihre Vertauschung (die ja bei einer Permutation ebenso auftreten kann) bei Division durch 4 den Rest 2 oder 3 lassen. Da die Endungen 11, 55, 66 und 99 auch nicht auftreten können, treten die Ziffern 1, 5, 6 und 9 nur einzeln auf (weil es sonst auch Permutationen mit diesen Endungen geben würde). Deshalb können nur solche Zahlen die Bedingungen erfüllen, die als Kombination dieser vier Ziffern entstehen, darunter sind 61, 65, 69, 159, 165, 569, 691 oder 1569. Da dies alles keine Quadratzahlen sind (und andere Zahlen aus den genannten Ziffern durch Permutationen auch zu diesen Zahlen führen würden), kann es keine Quadratzahlen der geforderten Art geben, bei denen mindestens zwei verschiedene Ziffern verwendet werden.

Untersuchen wir abschließend den Fall, dass bei den gesuchten Quadratzahlen alle Ziffern gleich sind. Dann kann dies nur die Ziffer 4 sein. Für $n \geq 2$ müsste wegen

$$\underbrace{444 \dots 4}_{n-mal} = 4 \cdot \underbrace{111 \dots 1}_{n-mal} = 4 \cdot \frac{10^n - 1}{9}$$

der Zähler $10^n - 1$ selbst eine Quadratzahl sein, was nicht möglich ist.

Es gibt also außer den einstelligen Quadratzahlen keine weiteren natürlichen Quadratzahlen, für die jede Permutation ihrer Ziffern wieder eine Quadratzahl ergibt.

❑

Termine

65. Mathematik-Olympiade, Runde 2 (Regionalrunde) 13. November 2025, https://www.mathematik-olympiaden.de/moev/index.php/aufgaben

Wettbewerb „Jugend forscht" – Wissenschaft LIVE! „Stress – Was passiert dabei in unserem Körper?" Darüber referiert online am 27. November 2025 (15:30 bis 16:45 Uhr) MATHIAS SCHMIDT vom Max-Planck-Institut für Psychiatrie. Anmeldung bis zum 26.11.2025 unter https://www.netigate.se/ra/s.aspx?s=1276053X501512722X64240

61. Bundeswettbewerb „Jugend forscht" , Anmeldeschluss am 30. November 2025 unter https://anmeldung.jugend-forscht.de/#formular

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2025/26)

Ausgabe[17]	Nr.	Thema	Aufgabe
10/2025	Thema 32.2	Rationale Zahlen	
09/2025	Thema 33.2	Zyklische Aufgabenformulierungen	
08/2025	Thema 33.1	Zyklische Aufgabenformulierungen	MO640946 MO641046
08/2025	Thema 31.3	Lösungsstrategien im Koordinatensystem	MO641043
08/2025	Thema 25.3	Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	MO640942 MO641042

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz" e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[17] Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (bino@hrz.tu-chemnitz.de) oder unter https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben erhältlich.