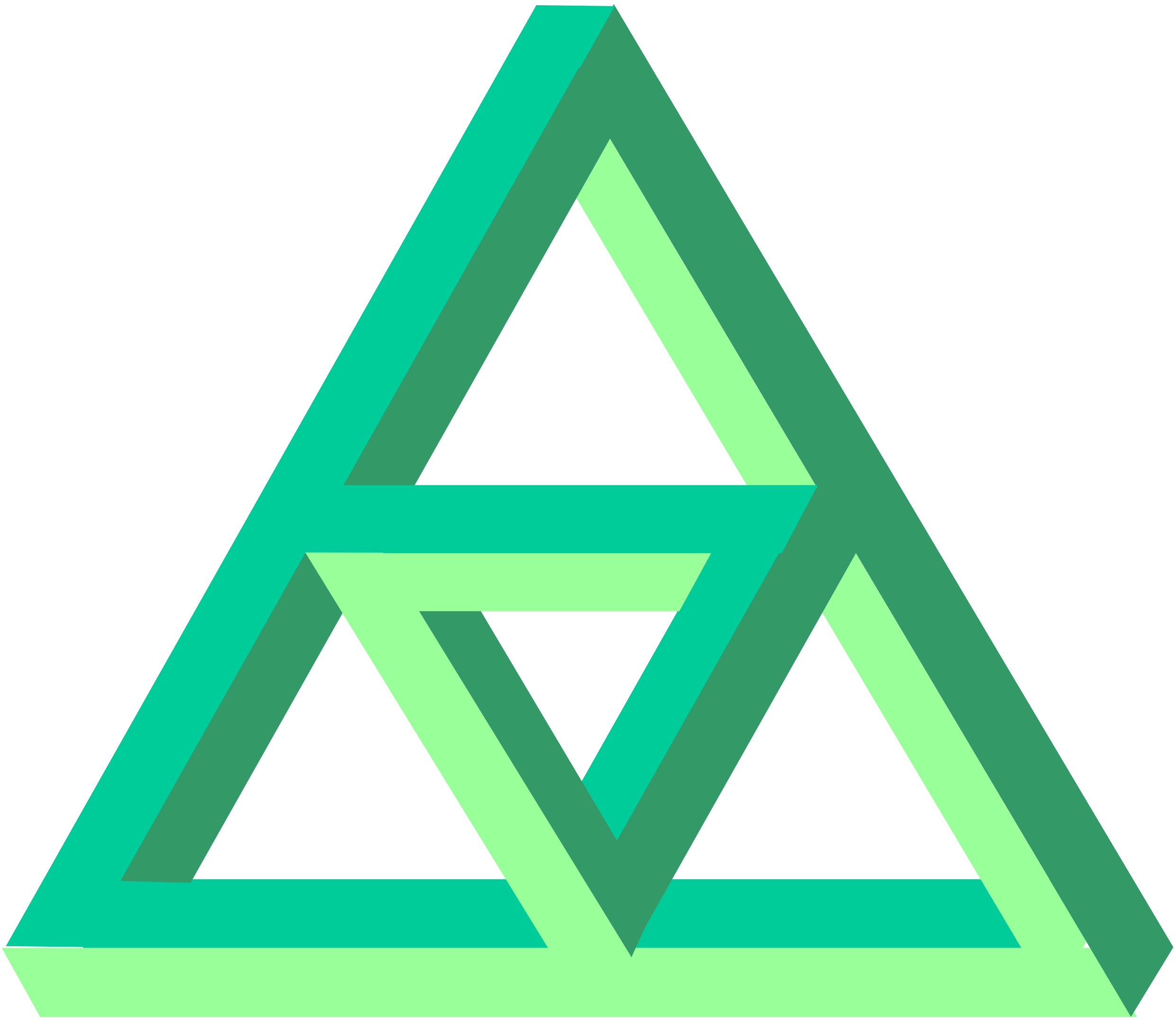
Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 08/2025 (August 2025) 24. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Wir eröffnen das neue Schuljahr mit dem Rückblick auf die Aufgaben der Bundesrunde der 64. Mathematik-Olympiade. Das „Leitthema“ des vergangenen Schuljahres konnte erneut mehrfach angewandt werden. Während in Aufgabe **MO641043** bereits in der Aufgabenstellung auf ein Koordinatensystem hingewiesen wurde, erscheint diese Lösungsvariante in den Aufgaben **MO640942/MO641042** überraschend. Die beiden Aufgaben passen aber ebenso zum Thema 25 „Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken“.

Mit den Aufgaben **MO640946/MO641046** untersuchen wir das neue Thema „Zyklische Aufgabenformulierungen“. Diese Probleme haben oft den Vorteil, Verallgemeinerungen zu finden, so dass damit eine intensive Nachbereitung zur MO erfolgen kann. Weil dabei die (allgemein bekannten) Mittelungleichungen oft als Lösungsansatz hilfreich sein können, fassen wir diese Ungleichungen nebst Beweisen zusammen.

Wir berichten von der **66. Internationalen Mathematik-Olympiade**, bei der das deutsche Team den 29. Platz erreichte. Auch wenn die sechs Aufgaben sehr hohen Schwierigkeitsgrad haben, lassen sich Einstiegsprobleme formulieren, die zum Verständnis der Herausforderungen beitragen können.

Unter Termine wird ausdrücklich auf die **19. Mitteleuropäische Mathematik-Olympiade** in Chemnitz hingewiesen – Gäste sind zur Abschlussveranstaltung herzlich willkommen.

---

[1] www.mathematik-olympiaden.de

[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 25.3 – Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken[3]

Aufgabe 25.07 – MO640942. Betrachtet wird die Ungleichung

$$\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-2x+5} \geq \sqrt{17}.$$

a) Zeigen Sie, dass der Term auf der linken Seite der Ungleichung für alle reellen Zahlen x definiert ist.
b) Zeigen Sie, dass die Ungleichung für alle reellen x erfüllt ist. Für welche x gilt Gleichheit beider Seiten?

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Wegen $x^2+4 \geq 4$ und $x^2-2x+5=(x-1)^2+4 \geq 4$ sind beide Wurzeln für alle reellen x definiert, damit ist der Term auf der linken Seite der Ungleichung für alle reellen x definiert.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Wir gehen von der allgemeingültigen Ungleichung $4 \cdot (2 \cdot x-1)^2 \geq 0$ aus[4], multiplizieren das Quadrat aus und formen wie folgt äquivalent um.

$$\begin{array}{ll}
16 \cdot x^2 - 16 \cdot x + 4 \geq 0 & | + x^2 + 16 \cdot x - 4 \\
17 \cdot x^2 \geq x^2 + 16 \cdot x - 4 & | + 68 \\
17 \cdot x^2 + 68 \geq x^2 + 16 \cdot x + 64 & |\text{Zusammenfassen} \\
17 \cdot (x^2+4) \geq (x+8)^2 & | \text{ Radizieren} \\
\sqrt{17} \cdot \sqrt{x^2+4} \geq x+8 & | \cdot (-2) \\
-2 \cdot \sqrt{17} \cdot \sqrt{x^2+4} \leq -2 \cdot x - 16 & | + 17 + x^2 + 4 \\
17 - 2 \cdot \sqrt{17} \cdot \sqrt{x^2+4} + x^2 + 4 \leq x^2 + 4 - 2 \cdot x - 16 + 17 & |\text{Zus.} \\
\left(\sqrt{17} - \sqrt{x^2+4}\right)^2 \leq x^2 - 2 \cdot x + 5 & |\text{Radizieren} \\
\sqrt{17} - \sqrt{x^2+4} \leq \sqrt{x^2 - 2 \cdot x + 5} & | + \sqrt{x^2+4}
\end{array}$$

Daraus folgt unmittelbar die Behauptung: $\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-2 \cdot x+5} \geq \sqrt{17}$.

Die Gleichheit gilt genau dann, wenn in der ersten Ungleichung die Gleichheit erfüllt ist, also wenn $x=\frac{1}{2}$ gilt, wie die Probe bestätigt:

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+4}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-2 \cdot \frac{1}{2}+5}=\sqrt{\frac{17}{4}}+\sqrt{\frac{17}{4}}=\sqrt{17}.$$

❑

Aufgabe 25.08 – MO641042. Betrachtet wird die Ungleichung

$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+2} \geq A.$$

---

[3] siehe auch Thema 25.1 in Heft 11/2023, Thema 25.2 in Heft 03/2025

[4] Diese Ungleichung finden wir natürlich durch Herleitung in umgekehrter Richtung.

a) Zeigen Sie, dass der Term auf der linken Seite der Ungleichung für alle reellen Zahlen x definiert ist.
b) Bestimmen Sie die größtmögliche reelle Zahl A so, dass die Ungleichung für alle reellen x erfüllt ist.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Wegen $x^2 + 1 \geq 1$ und $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \geq 1$ sind beide Wurzeln für alle reellen x definiert, damit ist der Term auf der linken Seite der Ungleichung für alle reellen x definiert.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Ist der Wert für A bekannt, kann der Beweis wie in Aufgabe MO640942 geführt werden. Wir könnten vermuten, dass der minimale Wert angenommen wird, wenn die beiden Wurzelausdrücke gleich groß sind. Dies ist wegen $\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2 - 2\cdot x + 2}$ für $x = \frac{1}{2}$ der Fall, was uns zu $A = \sqrt{5}$ führt. Mit dieser Annahme finden wir ausgehend von einer allgemeingültigen Ungleichung folgende Umformungen:

$$
\begin{array}{ll}
(2\cdot x - 1)^2 \geq 0 & |\text{Ausmultiplizieren} \\
4\cdot x^2 - 4\cdot x + 1 \geq 0 & | + x^2 + 4x + 4 \\
5\cdot(x^2+1) \geq x^2 + 4\cdot x + 4 & | \text{ Radizieren} \\
\sqrt{5}\cdot\sqrt{x^2+1} \geq x + 2 & | \cdot(-2) \\
-2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{x^2+1} \leq -2\cdot x - 4 & | + x^2 + 6 \\
5 - 2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{x^2+1} + x^2 + 1 \leq x^2 - 2\cdot x + 2 & | \text{ vollständiges Quadrat} \\
\left(\sqrt{5} - \sqrt{x^2+1}\right)^2 \leq x^2 - 2\cdot x + 2 & | \text{ Radizieren} \\
\sqrt{5} - \sqrt{x^2+1} \leq \sqrt{x^2 - 2\cdot x + 2} & | + \sqrt{x^2+1}
\end{array}
$$

und schließlich $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2 - 2\cdot x + 2} \geq \sqrt{5}$

Gehen wir aber davon aus, dass wir A nicht vorab bestimmen (schätzen) können, formen wir die gegebene Ungleichung wie folgt äquivalent um:

$$
\begin{array}{l}
\sqrt{x^2 - 2\cdot x + 2} \geq A - \sqrt{x^2+1} \\
x^2 - 2\cdot x + 2 \geq A^2 - 2\cdot A\cdot\sqrt{x^2+1} + x^2 + 1 \\
A^2 + 2\cdot x - 1 \leq 2\cdot A\cdot\sqrt{x^2+1} \\
A^4 + 2\cdot A^2\cdot(2\cdot x - 1) + 4\cdot x^2 - 4\cdot x + 1 \leq 4\cdot A^2\cdot(x^2+1) \\
x^2\cdot(4 - 4\cdot A^2) + x\cdot(4\cdot A^2 - 4) + A^4 - 6\cdot A^2 + 1 \leq 0
\end{array}
$$

Da wir in Teilaufgabe a) gesehen haben, dass jeder Wurzelausdruck mindestens den Wert 1 hat, ist A mindestens 2. Somit ist $4 - 4\cdot A^2 < 0$. Wir können also die Ungleichung durch $4 - 4\cdot A^2$ teilen und müssen dabei allerdings auf die Umkehrung des Relationszeichen achten:

$$x^2 - x + \frac{A^4 - 6 \cdot A^2 + 1}{4 - 4 \cdot A^2} \geq 0$$
$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{A^2 - 6 \cdot A^2 + 1}{4 - 4 \cdot A^2} \geq 0$$

Diese Ungleichung ist für alle reellen Zahlen x erfüllt, wenn $\frac{A^4-6\cdot A^2+1}{4-4\cdot A^2} - \frac{1}{4} \geq 0$ gilt. Es genügt deshalb $A^4 - 6 \cdot A^2 + 1 - 1 + A^2 = 0$ zu untersuchen. Aus dieser Gleichung erhalten wir $A^2 \cdot (A^2 - 5) = 0$. Auf diese Weise finden wir $A = \sqrt{5}$ (da $A = 0$ nicht der größtmögliche Wert sein kann). ❑

Nachtrag zur Aufgabe MO640942: Wir bestimmen die größtmögliche reelle Zahl A so, dass die Ungleichung $\sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2 - 2x + 5} \geq A$ für alle reellen x erfüllt ist.

$$\sqrt{x^2 - 2 \cdot x + 5} \geq A - \sqrt{x^2 + 4}$$
$$x^2 - 2 \cdot x + 5 \geq A^2 - 2 \cdot A \cdot \sqrt{x^2 + 4} + x^2 + 4$$
$$A^2 + 2 \cdot x - 1 \leq 2 \cdot A \cdot \sqrt{x^2 + 4}$$
$$A^4 + 2 \cdot A^2 \cdot (2 \cdot x - 1) + 4 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 1 \leq 4 \cdot A^2 \cdot (x^2 + 4)$$
$$x^2 \cdot (4 - 4 \cdot A^2) + x \cdot (4 \cdot A^2 - 4) + A^4 - 18 \cdot A^2 + 1 \leq 0$$

Wir haben in Teilaufgabe a) die Abschätzung $A \geq 5.$ Somit ist $4 - 4 \cdot A^2 < 0$. Wir können also die Ungleichung durch $4 - 4 \cdot A^2$ teilen und müssen dabei allerdings auf die Umkehrung des Relationszeichen achten:

$$x^2 - x + \frac{A^4 - 18 \cdot A^2 + 1}{4 - 4 \cdot A^2} \geq 0$$
$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{A^2 - 18 \cdot A^2 + 1}{4 - 4 \cdot A^2} \geq 0$$

Diese Ungleichung ist für alle reellen Zahlen x erfüllt, wenn $\frac{A^4-18\cdot A^2+1}{4-4\cdot A^2} - \frac{1}{4} \geq 0$ gilt. Es genügt deshalb, die Gleichung $A^4 - 18 \cdot A^2 + 1 - 1 + A^2 = 0$ zu untersuchen. Aus dieser Gleichunge erhalten wir $A^2 \cdot (A^2 - 17) = 0$. Auf diese Weise finden wir $A = \sqrt{17}$ (da $A = 0$ nicht der größtmögliche Wert sein kann).

Thema 31.4 – Lösungsstrategien im Koordinatensystem[5]

Dem Leitthema dieses MO-Jahrganges folgend gibt es für Teil b) der **Aufgaben MO640942** bzw. **M0641042** überraschende Lösungsansätze:

[5] siehe auch Thema 31.1 in Heft 03/2025, Thema 31.2 in Heft 04/2025 und Thema 31.3 in Heft 05/2025

Aufgabe 31.20. Betrachtet wird die Ungleichung $\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-2x+5} \geq \sqrt{17}$. Zeigen Sie, dass die Ungleichung für alle reellen x erfüllt ist. Für welche x gilt Gleichheit beider Seiten?

Lösungshinweise: Wir betrachten in einem kartesischen Koordinatensystem die Punkte $A(0,-2)$ und $B(1,2)$ sowie den (variablen) Punkt $C(x,0)$ mit reeller Variablen x. Wir bestimmen die Streckenlängen mit dem EUKLIDischen Abstand:

$$\begin{aligned}\overline{AC} &= \sqrt{(0-x)^2+(-2-0)^2} = \sqrt{x^2+4}\\ \overline{BC} &= \sqrt{(1-x)^2+(2-0)^2} = \sqrt{x^2-2\cdot x+5}\\ \overline{AB} &= \sqrt{(0-1)^2+(-2-2)^2} = \sqrt{1^2+4^2} = \sqrt{17}\end{aligned}$$

Im Dreieck ΔABC gilt stets die Dreiecksungleichung, also gilt wie behauptet für jede reelle Zahl x

$$\overline{AC}+\overline{BC} = \sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-2\cdot x+5} \geq \overline{AB} = \sqrt{17}$$

Die Gleichheit gilt genau dann, wenn das Dreieck zu einer Strecke entartet und $C(x,0)$ im Innern der Strecke $\overline{AB}$ liegt, also im Fall von $x = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$. ❑

Aufgabe 31.21. Betrachtet wird die Ungleichung $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+2} \geq A$. Bestimmen Sie die größtmögliche reelle Zahl A so, dass die Ungleichung für alle reellen x erfüllt ist. Für welche x gilt Gleichheit beider Seiten?

Lösungshinweise: Um die gegebenen Wurzelausdrücke zu erhalten, betrachten wir in einem kartesischen Koordinatensystem (in Anlehnung an obige Aufgabe) die Punkte $A(0,-1)$ und $B(1,1)$ sowie den (variablen) Punkt $C(x,0)$ mit reeller Variablen x. Wir bestimmen die Streckenlängen mit dem EUKLIDischen Abstand:

$$\begin{aligned}\overline{AC} &= \sqrt{(0-x)^2+(-1-0)^2} = \sqrt{x^2+1}\\ \overline{BC} &= \sqrt{(1-x)^2+(1-0)^2} = \sqrt{x^2-2\cdot x+2}\end{aligned}$$

Dann ergibt sich die Länge

$$\overline{AB} = \sqrt{(0-1)^2+(-1-1)^2} = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$$

Im Dreieck ΔABC gilt stets die Dreiecksungleichung, also gilt wie behauptet für jede reelle Zahl x

$$\overline{AC}+\overline{BC} = \sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+2} \geq \overline{AB} = \sqrt{5}.$$

Die Gleichheit gilt genau dann, wenn das Dreieck zu einer Strecke entartet und $C(x,0)$ im Innern der Strecke $\overline{AB}$ liegt, also im Fall von $x = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$. ❑

Aufgabe 31.22 – MO641043. In einem kartesischen Koordinatensystem der Ebene sei eine endliche Anzahl von Quadraten gegeben. Dabei sind diese Quadrate alle paarweise kongruent und alle ihre Seiten sind parallel zu den Achsen des Koordinatensystems. Des Weiteren bezeichne S die Menge aller Punkte der Ebene, die zu mindestens einem dieser Quadrate gehören.

Zeigen Sie: Hat S die Fläche 6, so kann man immer eines oder mehrere der gegebenen Quadrate derart auswählen, dass die ausgewählten Quadrate paarweise disjunkt sind und zusammen eine Fläche ≥ 1 haben.

Hinweis: Zu einem Quadrat gehören alle Punkte im Inneren und auf den Kanten sowie die vier Ecken. Quadrate heißen paarweise disjunkt, falls es keinen Punkt der Ebene gibt, der zu mindestens zweien der Quadrate gehört.

Lösungshinweise: Ohne Einschränkung seien die gegebenen kongruenten Quadrate als $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ für eine positive ganze Zahl $n > 0$ aufgelistet, wobei wir eine Auflistung ohne Wiederholungen annehmen, d.h. die Mittelpunkte der Quadrate $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ sind paarweise verschieden.

Es sei (x_k, y_k) der Mittelpunkt des Quadrates Q_k. Die Reihenfolge wählen wir dabei so, dass gilt: $y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n$. Desweiteren bezeichne $2 \cdot a$ die gemeinsame Seitenlänge der kongruenten Quadrate. Das Quadrat Q_k hat somit den Flächeninhalt $4 \cdot a^2$ und die Eckpunkte

$$(x_k - a, y_k - a); (x_k + a, y_k - a); (x_k + a, y_k + a); (x_k - a, y_k + a)$$

Es lassen sich nun aus $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ rekursiv Quadrate $Q'_1, Q'_2, \ldots, Q'_m$ mit den geforderten Eigenschaften wie folgt auswählen:

(I) Als Q'_1 wählen wir das Quadrat Q_1.

(II) Sind $Q'_1, Q'_2, \ldots, Q'_j$ bereits gesetzt, so wählen wir als Q'_{j+1} das erste Quadrat aus der Liste $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, welches verschieden und disjunkt ist zu $Q'_1, Q'_2, \ldots, Q'_j$. Lässt sich kein geeignetes Quadrat Q'_{j+1} finden, so endet der Prozess mit $m = j$ und der Auswahl $Q'_1, Q'_2, \ldots, Q'_j$.

Mit (II) sind die ausgewählten Quadrate $Q'_1, Q'_2, \ldots, Q'_m$ offensichtlich paarweise disjunkt.

Nach der erfolgten Auswahl gilt für alle $1 \leq j \leq m$, dass das Quadrat Q'_j eines der ursprünglichen Quadrate ist, beispielsweise $Q'_j = Q_{i_j}$ mit $1 \leq i_j \leq n$. Mit (I) ist $i_1 = 1$ und mit (II) gilt $i_j < i_{j+1}$ für alle $1 \leq j < m$. Es folgt somit die Monotonie der Indizes $1 = i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n$.

Zum Quadrat Q'_j bezeichne R'_j das Rechteck mit den Eckpunkten

$$\left(x_{i_j} - 3 \cdot a, y_{i_j} - a\right);\ \left(x_{i_j} + a, y_{i_j} - 3 \cdot a\right);$$
$$\left(x_{i_j} + 3 \cdot a, y_{i_j} + 3 \cdot a\right);\ \left(x_{i_j} - 3 \cdot a, y_{i_j} + 3 \cdot a\right)$$

und zugehörigem Flächeninhalt $24 \cdot a^2$. Wir stellen fest: Die Rechtecke $R'_1, R'_2, \dots, R'_m$ überdecken zusammen die Quadrate $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$. Um dies zu beweisen, sei Q_k mit $1 \leq k \leq n$ ein beliebiges der Quadrate $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$.

- Ist dabei $Q_k = Q'_j$ eines der ausgewählten Quadrate $Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_m$, so wird Q_k offensichtlich vom Rechteck R'_j überdeckt.
- Ist jedoch Q_k keines der Quadrate $Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_m$, folgt $k > 1 = i_1$. Wir wählen nun $1 \leq j \leq m$ maximal mit $i_j < k$. Mit (II) ist dann mindestens eines der Quadrate $Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_j$ nicht disjunkt zu Q_k, da sich ansonsten der Widerspruch $Q_k = Q'_{j+1}$ ergibt. Es findet sich daher ein $1 \leq l \leq j$, so dass Q'_l nicht disjunkt ist zu Q_k. Damit liegt der Mittelpunkt (x_k, y_k) des Quadrates Q_k aber im Inneren oder auf dem Rand des Quadrates mit den Eckpunkten

$$\left(x_{i_l} - 2 \cdot a, y_{i_l} - 2 \cdot a\right);\ \left(x_{i_l} + 2 \cdot a, y_{i_l} - 2 \cdot a\right);$$
$$\left(x_{i_l} + 2 \cdot a, y_{i_l} + 2 \cdot a\right);\ \left(x_{i_l} - 2 \cdot a, y_{i_l} + 2 \cdot a\right)$$

Da zudem $i_l \leq i_j < k$, folgt $y_{i_l} \leq y_k$ mit (1). Der Mittelpunkt (x_k, y_k) des Quadrates Q_k liegt somit im Inneren oder auf dem Rand des Rechtecks mit den Eckpunkten

$$\left(x_{i_l} - 2 \cdot a, y_{i_l}\right);\ \left(x_{i_l} + 2 \cdot a, y_{i_l}\right);\ \left(x_{i_l} + 2 \cdot a, y_{i_l} + 2 \cdot a\right);\ \left(x_{i_l} - 2 \cdot a, y_{i_l} + 2 \cdot a\right)$$

womit Q_k vom Rechteck R'_l überdeckt wird, also gilt die Überdeckung.

Laut Aufgabenstellung überdecken die Quadrate $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ zusammen eine Fläche S der Größe 6. Mit (3) überdecken somit auch $R'_1, R'_2, \dots, R'_m$ zusammen eine Fläche der Größe ≥ 6. Da jedes der Rechtecke einen Flächeninhalt $24 \cdot a^2$ hat, ergibt sich eine Gesamtfläche $m \cdot 24 \cdot a^2 \geq 6$. Es folgt daraus $m \cdot 4 \cdot a^2 \geq 1$, womit die disjunkten Quadrate $Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_m$ eine Gesamtfläche ≥ 1 haben. ❑

Thema 34 – Zyklische Aufgabenformulierungen

In einer Aufgabe nennen wir die Variablen zyklisch angeordnet, wenn sich durch zyklische Vertauschung der Variablen der Aufgabenstellung inhaltlich nicht verändert. So sind beispielsweise die reellen Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4 im Term $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_4} + \frac{x_4}{x_1}$ zyklisch angeordnet, weil eine Index-Verschiebung

$$x_2 \coloneqq x_1, x_3 \coloneqq x_2, x_4 \coloneqq x_3, x_1 \coloneqq x_4$$

die Aufgabenstellung $\frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_4} + \frac{x_4}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$ nicht verändert.

Aufgabe 34.01 – MO640946. Es seien $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ nicht-negative Zahlen mit Summe 1. Was ist der größte Wert, den der Ausdruck

$$X = x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_4 + x_4 \cdot x_5 + x_5 \cdot x_6 + x_6 \cdot x_1$$

annehmen kann?

Aufgabe 34.02 – MO641046. Es seien $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ nicht-negative reelle Zahlen mit Summe 1. Was ist der größte Wert, den der Ausdruck

$$X = x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_4 + x_4 \cdot x_5 + x_5 \cdot x_6 + x_6 \cdot x_7 + x_7 \cdot x_1$$

annehmen kann?

Die formale Ähnlichkeit beider Aufgaben motiviert, eine Verallgemeinerung zu untersuchen.

Aufgabe 34.03. Es seien $n \geq 2$ und $x_1, x_2, \dots, x_n$ nicht-negative reelle Zahlen mit Summe 1. Was ist in Abhängigkeit von n der größte Wert, den der Ausdruck

$$X = x_1 \cdot x_2 + \cdots + x_{n-1} \cdot x_n + x_n \cdot x_1$$

annehmen kann?

Lösungshinweise: Untersuchen wir zunächst den Fall $n = 2$. Dann ist der größte Wert für $X = x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_1 = 2 \cdot x_1 \cdot x_2$ mit $x_1 + x_2 = 1$ gesucht.

Verwenden wir die als bekannt vorausgesetzte Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel[6], so erhalten wir für positive Zahlen x_1, x_2 mit $x_1 + x_2 = 1$ die Abschätzung

$$\sqrt{x_1 \cdot x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{2},$$

woraus unmittelbar $x_1 \cdot x_2 \leq \frac{1}{4}$ und somit $X \leq \frac{1}{2}$ folgt. Die Gleichheit gilt im Fall von $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$. Ist eine der Variablen gleich null, dann gilt diese Abschätzung trivialerweise.

Um die Abschätzung direkt herzuleiten, schreiben wir $y = x_1$. Damit erhalten wir wegen $1 = (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2$

$$1 = y^2 + (1 - y)^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 = 2 \cdot y^2 - 2 \cdot y + 1 + X.$$

Nach einfacher Umformung können wir diese Gleichung mittels quadratischer Ergänzung als

[6] Siehe Beitrag am Ende des Heftes

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=X$$

schreiben. Da das Quadrat einer reellen Zahl stets nicht-negativ ist, folgt unmittelbar $X \leq \frac{1}{2}$. Dabei wird der maximale Wert $\frac{1}{2}$ im Fall von $y = x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$ tatsächlich auch angenommen.

Untersuchen wir mit diesem Ansatz nun eine beliebige gerade Zahl $n = 2 \cdot m$ mit $m > 1$. Aus $1 = \left((x_1 + x_3 + \cdots + x_{2m-1}) + (x_2 + x_4 + \cdots + x_{2m})\right)^2$ erhalten wir

$$\begin{aligned}&1-(x_1 + x_3 + \cdots + x_{2m-1})^2-(x_2 + x_4 + \cdots + x_{2m})^2\\&= 2\cdot(x_1 + x_3 + \cdots + x_{2m-1})\cdot(x_2 + x_4 + \cdots + x_{2m}).\end{aligned}$$

Schreiben wir $y = x_1 + x_3 + \cdots + x_{2m-1}$, so gilt $1 - y = x_2 + x_4 + \cdots + x_{2m}$. Folglich können wir die linke Seite der Gleichung zu $2\cdot\left(\frac{1}{4}-\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\right)$ umformen. Das Ausmultiplizieren des Produktes auf der rechten Seite der Gleichung führt zu einer Summe von nicht-negativer Summanden, unter denen alle in X vorkommenden paarweisen Produkte enthalten sind,

$$\frac{1}{4}-\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=(x_1 + x_3 + \cdots + x_{2m-1})\cdot(x_2 + x_4 + \cdots + x_{2m}) \geq X\,.$$

Somit kann X den Wert $\frac{1}{4}$ nicht übersteigen. Da im Fall $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$ und $x_3 = \cdots = x_{2m} = 0$ sogar $X = \frac{1}{4}$ gilt, kann der Ausdruck den maximalen Wert auch annehmen.

Wir erkennen nun, dass dieser Ansatz nicht unmittelbar auf eine ungerade Zahl $n = 2m + 1$ übertragen werden kann. Mit einer Aufteilung der ungeraden Indizes in den ersten Klammerausdruck und der geraden Indizes in den zweiten Klammerausdruck lässt sich das Produkt $x_{2m+1} \cdot x_1$ nicht erzeugen. Schnell stellen wir fest, dass auch bei anderen Aufteilungen der Summanden in zwei Klammerausdrücke nicht alle paarweisen Produkte erzeugt werden können.

Untersuchen wir deshalb zunächst den Fall $n = 3$. Es ist hierbei der größte Wert von $X = x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_1$ mit $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ gesucht.

Aus $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ erhalten wir für $x_1 \neq 1$ in Analogie zur obigen Überlegung

$$\frac{x_2}{1-x_1}+\frac{x_3}{1-x_1}=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{x_2}{1-x_1}\cdot\frac{x_3}{1-x_1}\leq\frac{1}{4} \quad\Rightarrow\quad x_2\cdot x_3 \leq \frac{1}{4}\cdot(1-x_1)^2,$$

wobei die Gleichheit bei $x_2 = x_3 = \frac{1-x_1}{2}$ gegeben ist.

$$\begin{aligned}X &= x_1\cdot x_2 + x_2\cdot x_3 + x_3\cdot x_1\\&= x_1\cdot(x_2+x_3) + x_2\cdot x_3 \leq x_1\cdot(1-x_1)+\tfrac{1}{4}\cdot(1-x_1)^2=\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}\cdot x_1-\tfrac{3}{4}\cdot x_1^2\end{aligned}$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung können wir zu $\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{4}{9}-\left(x_1-\frac{1}{3}\right)^2\right)$ umformen. Somit finden wir die Abschätzung $X \leq \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{9}=\frac{1}{3}$, weil das Quadrat in der Klammer stets nicht-negativ ist. Der Maximalwert wird für $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{3}$ auch angenommen.

Betrachten wir nun die Summe für ungerade Zahlen $n = 2m + 1$ mit $m > 2$

$$X = x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + \cdots + x_{2m-1} \cdot x_{2m} + x_{2m} \cdot x_{2m+1} + x_{2m+1} \cdot x_1$$

O.B.d.A. können wir annehmen, dass keine dieser $2m + 1$ Variablen kleiner als x_{2m+1} ist (andernfalls können wir die Variablen zyklisch entsprechend umbenennen). Wenn wir im vorletzten Summanden x_{2m+1} durch x_1 ersetzen und den positiven Summanden $x_{2m-1} \cdot x_{2m+1}$ anfügen, erhalten wir

$$X \leq x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + \cdots + x_{2m-1} \cdot x_{2m} + x_{2m} \cdot x_1 + x_{2m+1} \cdot x_1 + x_{2m-1} \cdot x_{2m+1}$$
$$X \leq x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + \cdots + x_{2m-1} \cdot (x_{2m} + x_{2m+1}) + (x_{2m} + x_{2m+1}) \cdot x_1$$

Damit haben wir aber die Situation für $2m$ Variablen $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2m-1}, (x_{2m} + x_{2m+1})$ mit Summe 1, für die wir den Maximalwert $\frac{1}{4}$ bereits kennen. ❑

Aufgabe 34.04. Es seien $n > 1$ und $x_1, x_2, \dots, x_n$ positive reelle Zahlen. Man zeige die Ungleichung

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_n}{x_1} \geq n.$$

Lösungshinweise: Für $n = 2$ lautet die Ungleichung $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \geq 2$, die als allgemein bekannt vorausgesetzt werden darf. Um diese Aussage dennoch zu beweisen, kennen wir zwei Ansätze:

- *Quadrat einer reellen Zahl:* Aus $(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2 \geq 0$ erhalten wir $x_1^2 + x_2^2 \geq 2 \cdot x_1 \cdot x_2$, woraus nach Division durch $x_1 \cdot x_2 > 0$ die Behauptung folgt.
- *Ungleichung zwischen geometrischen und arithmetischen Mittel:* Aus $1 = \sqrt{\frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_1}} \leq \frac{\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}}{2}$ erhalten wir nach Multiplikation mit 2 die Behauptung.

Während der erstgenannte Ansatz eine Verallgemeinerung nicht unmittelbar erkennen lässt, hilft die verallgemeinerte Ungleichung zwischen geometrischen und arithmetischen Mittel: Aus der Ungleichung

$$1 = \sqrt{\frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_3} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{x_1}} \leq \frac{\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_n}{x_1}}{n}$$

folgt nach Multiplikation mit n die Behauptung. ❑

Aufgabe 34.05 – MO520943. Bestimmen Sie alle reellen Lösungen (x, y, z) des Gleichungssystems

$$x - \frac{1}{y} = y - \frac{1}{z} = z - \frac{1}{x}$$

Lösungshinweise: Eine notwendige Bedingung an jede Lösung (x, y, z) ist $x, y, z \neq 0$. Wir formen die erste Gleichung $x - \frac{1}{y} = y - \frac{1}{z}$ um zu $x - y = \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{y-z}{y \cdot z}$. In ähnlicher Weise erhalten wir $y - z = \frac{z-x}{z \cdot x}$; $z - x = \frac{x-y}{x \cdot y}$. Multiplikation dieser drei Gleichungen liefert

$$(x-y) \cdot (y-z) \cdot (z-x) = -(x-y) \cdot (y-z) \cdot (z-x) \cdot \frac{1}{x^2 \cdot y^2 \cdot z^2}$$

oder äquivalent

$$(x-y) \cdot (y-z) \cdot (z-x) \cdot \left(1 + \frac{1}{x^2 \cdot y^2 \cdot z^2}\right) = 0$$

Da offensichtlich der Ausdruck $1 + \frac{1}{x^2 \cdot y^2 \cdot z^2} > 1$ stets positiv ist, gilt die Gleichung genau dann, wenn $x = y$ oder $y = z$ oder $z = x$ erfüllt ist. Es sei deshalb o.B.d.A. $x = y$. Dann folgt aber aus

$$x - \frac{1}{y} = y - \frac{1}{z}, \quad \text{also} \quad x - \frac{1}{x} = x - \frac{1}{z}$$

die Gleichheit $x = z$, also ist $x = y = z$ und (x, x, x) für $x \neq 0$ ist die einzig mögliche Lösung des Gleichungssystems. Eine Probe bestätigt, dass dieses Ergebnis wirklich Lösung ist. ❑

Aufgabe 34.06 – MO521043. Bestimmen Sie alle reellen Lösungen (x, y, z) des Gleichungssystems

$$x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}$$

Lösungshinweise: Eine notwendige Bedingung an jede Lösung (x, y, z) ist $x, y, z \neq 0$. Wir setzen $a = x + \frac{1}{y}$. Dann gilt $\frac{1}{y} = a - x$, also $y = \frac{1}{a-x}$, und wegen $a = z + \frac{1}{x}$ auch $z = a - \frac{1}{x}$. Verwenden wir diese Zusammenhänge in der Gleichung $a = y + \frac{1}{z}$, so erhalten wir nacheinander

$$\begin{aligned}
&a = \frac{1}{a-x} + \frac{x}{a \cdot x - 1}, \\
&a \cdot (a-x) \cdot (ax-1) - (ax-1) - (a-x) \cdot x = 0, \\
&(1-a^2) \cdot (x^2 - a \cdot x + 1) = 0.
\end{aligned}$$

Es gilt also $a = 1, a = -1$ oder $x^2 - a \cdot x + 1 = 0$.

Fall 1: Aus $a = 1$ folgt wegen $a = x + \frac{1}{y} \neq x$ sofort $x \neq 1, y = \frac{1}{1-x}, z = -\frac{1-x}{x}$.

Fall 2: Aus $a = -1$ folgt wie im Fall 1 sofort $x \neq -1, y = -\frac{1}{1+x}, z = -\frac{1+x}{x}$.

Fall 3: Aus $x^2 - a \cdot x + 1 = 0$ erhalten wir (wegen $x \neq 0$) $a = x + \frac{1}{x}$. Mit $a = x + \frac{1}{y} = z + \frac{1}{x}$ folgt daraus unmittelbar $x = y = z$.

Eine Probe bestätigt[7], dass die Tripel

$$(x, x, x) \quad \text{für} \quad x \neq 0\,,$$
$$\left(x, \frac{1}{1-x}, -\frac{1-x}{x}\right) \quad \text{für} \quad x \notin \{0\,,1\}\,,$$
$$\left(x, -\frac{1}{1+x}, -\frac{1+x}{x}\right) \quad \text{für} \quad x \notin \{-1\,,0\}$$

auch wirklich Lösungen und damit (genau) alle Lösungen des Gleichungssystems sind:

$$x + \frac{1}{\frac{1}{1-x}} = x + 1 - x = 1; \frac{1}{1-x} - \frac{1}{\frac{1-x}{x}} = \frac{1}{1-x} - \frac{x}{1-x} = 1; -\frac{1-x}{x} + \frac{1}{x} = 1.$$

$$x - \frac{1}{\frac{1}{1+x}} = x - 1 - x = -1; -\frac{1}{1+x} - \frac{1}{\frac{1+x}{x}} = -\frac{1}{1+x} - \frac{x}{1+x} = -1\,;$$
$$-\frac{1+x}{x} + \frac{1}{x} = -1\,.$$

❑

Aufgabe 34.07 – MO430933/MO431032. Bestimmen Sie alle reellen Lösungstripel (a, b, c) des Gleichungssystems

$$a + bc = 1 \qquad b + ca = 1 \qquad c + ab = 1$$

Lösungshinweise: Wir multiplizieren die ersten beiden Gleichungen mit a bzw. mit b und subtrahieren die Ergebnisse voneinander. Dies führt zu

$$a^2 - b^2 = a - b$$

Wegen $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$ gilt diese Gleichheit für $a = b$ oder (falls $a \neq b$) für $a = -b$.

Fall 1: $a = b$, eingesetzt in die dritte Gleichung ergibt $c + a^2 = 1$. Somit ist das Tripel $(a, a, 1 - a^2)$ ein Lösungskandidat. Setzen wir ein solches Tripel in die erste Gleichung ein, erhalten wir

$$a + a \cdot (1 - a^2) = 2 \cdot a - a^3 = 1 \quad \text{ also } \quad a^3 - 2 \cdot a + 1 = 0$$

[7] Während für das erste Tripel die Probe als offensichtlich angesehen werden kann, sind die Proben der anderen Lösungstripel vorzurechnen.

Wir erkennen wegen $1^3 - 2 \cdot 1 + 1 = 1$, dass $a = 1$ eine Lösung dieser Gleichung ist. Somit sind $(1, 1, 0)$ und alle Vertauschungen $(1, 0, 1)$ und $(0, 1, 1)$ Lösungstripel des gegebenen Gleichungssystems. Klammern wir aus der kubischen Gleichung den Linearfaktor $(a - 1)$ aus, finden wir

$$a^3 - 2 \cdot a + 1 = a^3 - a^2 + a^2 - a - a + 1 = a^2(a-1) + a(a-1) - (a-1)$$

Somit kann es auch Lösungstripel geben, wenn $a^2 + a - 1 = 0$ gilt. Nach der Lösungsformel für quadratische Gleichungen ist dies für

$$a_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

erfüllt. Wegen $c = 1 - a^2 = a$ ist also (a, a, a) mit $a = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ein weiteres Lösungstripel, wie eine Probe bestätigt.

Fall 2: $a = -b \neq 0$, eingesetzt in die erste Gleichung ergibt $c = \frac{a-1}{a}$. Somit ist das Tripel $\left(a, a, \frac{a-1}{a}\right)$ ein Lösungskandidat. Setzen wir ein solches Tripel in die dritte Gleichung ein, erhalten wir

$$\frac{a-1}{a} - a^2 = 1 \quad \text{also} \quad -a^3 - 1 = 0 \quad \text{bzw.} \quad a = -1.$$

Dies ergibt aber keine Lösung, weil wir mit $c = \frac{-1-1}{-1} = 2$ in der zweiten Gleichung $1 + 2 \cdot (-1) = -1 \neq 1$ finden. ❑

Aufgabe 34.08 – MO431043. Bestimmen Sie alle reellen Tupel (a, b, c, d), welche Lösungen des folgenden Gleichungssystems sind:

$$a + bc = 1 \qquad b + cd = 1 \qquad c + da = 1 \qquad d + ab = 1$$

Lösungshinweise: Wir multiplizieren die ersten beiden Gleichungen mit d bzw. mit b und subtrahieren die Ergebnisse voneinander. Dies führt zu

$$ad - b^2 = d - b$$

Durch in ähnlicher Weise paarweise geeignete Multiplikationen und Subtraktionen finden wir auch

$$ba - c^2 = a - c \qquad cb - d^2 = b - d \qquad dc - a^2 = c - a.$$

Addieren wir die vier Gleichungen, erhalten wir

$$ab + bc + cd + da - a^2 - b^2 - c^2 - d^2 = 0$$

Nach Multiplikation mit -2 und anschließendem Zusammenfassen ist die gleichbedeutend zu

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(d-a)^2=0$$

Die Summe der vier Quadrate kann aber nur dann 0 ergeben, wenn alle Summanden gleich 0 sind, also wenn $a=b=c=d$ gilt. Setzen wir in den Ausgangsgleichung entsprechend a für die Variablen b, c oder d ein, erhalten wir jeweils

$$a+a^2=1 \quad \text{mit den Lösungen} \quad a_{1,2}=-\frac{1}{2}\cdot\left(1\pm\sqrt{5}\right).$$

Daher hat das Gleichungssystem genau die beiden Lösungen (a, b, c, d) mit $a=b=c=d=-\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. ❑

Aufgabe 34.09 – MO450945/MO451046. Bestimmen Sie alle reellen Tripel (x, y, z), welche Lösungen des folgenden Gleichungssystems sind:

$$x+y+\frac{1}{z}=3 \qquad y+z+\frac{1}{x}=3 \qquad z+x+\frac{1}{y}=3.$$

Lösungshinweise: Durch Multiplikation mit dem jeweiligen Hauptnenner folgt

$$\begin{aligned} x\cdot z+y\cdot z+1&=3z && (1)\\ y\cdot x+z\cdot x+1&=3x && (2)\\ z\cdot y+x\cdot y+1&=3y && (3) \end{aligned}$$

Subtrahieren wir die zweite Gleichung von der ersten Gleichung, erhalten wir $(z-x)\cdot(y-3)=0$, also $z=x$ oder $y=3$, und analog aus der dritten und zweiten Gleichung sowie aus der ersten und dritten Gleichung $x=y$ oder $z=3$ bzw. $y=z$ oder $x=3$. D.h., entweder sind zwei der Variablen gleich oder die dritte Variable ist gleich 3.

Fall 1: x, y und z sind paarweise verschieden. Wegen $x\neq y$ und $y\neq z$ muss gleichzeitig $z=x=3$, im Widerspruch zur Annahme $z\neq x$. Dieser Fall liefert somit keine Lösungen.

Fall 2: Genau zwei der Zahlen x, y und z sind gleich. Da das gegebene Gleichungssystem in den drei Variablen symmetrisch ist, dürfen wir o.B.d.A. annehmen, dass $x=y\neq z$ gilt. Mit obiger Aussage folgt damit $x=y=3$ und Einsetzen in Gleichung (3) liefert $3z+9+1=9$, also $z=-\frac{1}{3}$. Wir erhalten somit das Tripel $\left(3, 3, -\frac{1}{3}\right)$ als einen Lösungskandidaten des Gleichungssystems. Die Symmetrie des Gleichungssystems liefert $\left(3, -\frac{1}{3}, 3\right)$ und $\left(-\frac{1}{3}, 3, 3\right)$ als weitere mögliche Lösungen.

Fall 3: Es sind alle drei Variablen gleich, $x=y=z$. Dann wird Gleichung (1) zur quadratischen Gleichung $2x^2-3\cdot x+1=0$, aus der nach der Faktorisierung $(2\cdot x-1)\cdot(x-1)=0$ oder mittels der Lösungsformel $x_{1,2}=\frac{3}{4}\pm\sqrt{\frac{9}{16}-\frac{1}{2}}$ die

Lösungen $x = 1$ und $x = \frac{1}{2}$ abgelesen werden können. Dies liefert weitere Lösungskandidaten $(1\,,1\,,1)$ und $\left(\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\right)$.

Eine Probe bestätigt, dass alle fünf gefundenen Lösungskandidaten auch wirklich Lösungen des ursprünglichen Gleichungssystems sind.

$$3 + 3 - \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3 \quad ; \quad 1 + 1 + \frac{1}{1} = 3 \quad ; \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 3$$

Die gesuchte Lösungsmenge lautet also

$$L = \left\{\left(3, 3, -\tfrac{1}{3}\right), \left(3, -\ \tfrac{1}{3}, 3\right), \left(-\tfrac{1}{3}, 3\ , 3\right), (1\,,1\,,1), \left(\tfrac{1}{2}\ ,\tfrac{1}{2}\ ,\tfrac{1}{2}\right)\right\}.$$ ❑

Aufgabe 34.10 – MO360923. Es seien a, b, c und d positive Zahlen. Beweisen Sie, dass unter dieser Voraussetzung stets die Ungleichung

$$\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+b+d} + \frac{1}{a+c+d} + \frac{1}{b+c+d} > \frac{4}{a+b+c+d}$$

gilt!

Lösungshinweise: Da die gegebenen Variablen alle positiv sind, ist jede Summe von drei dieser Werte kleiner als die Summe aller vier Werte, zum Beispiel

$$0 < a + b + c < a + b + c + d.$$

Durch Übergang zu den Reziproken erhalten wir für dieses Beispiel $\frac{1}{a+b+c} > \frac{1}{a+b+c+d}$. Addieren wir nun die in Analogie erhaltenen vier Ungleichungen, folgt daraus unmittelbar die Ungleichung. ❑

Folgerung. Setzen wir in Aufgabe 33.10 beispielsweise $a = b = c = d = 1$, so lautet die Ungleichung $4 \cdot \frac{1}{3} > \frac{4}{4} = 1$. Offenbar ist diese Abschätzung recht grob. Deshalb stellen wir uns die Frage, ob es eine größte Zahl G gibt, so dass

$$\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+b+d} + \frac{1}{a+c+d} + \frac{1}{b+c+d} \geq G \cdot \frac{1}{a+b+c+d}$$

für alle positiven Zahlen a, b, c und d gilt.

Lösungshinweis: Wir verwenden die Ungleichung zwischen harmonischen und arithmetischen Mittel[8] für positive Zahlen, die besagt

[8] Siehe den Beitrag am Ende dieses Heftes

$$\frac{4}{\frac{1}{\left(\frac{1}{a+b+c}\right)}+\frac{1}{\left(\frac{1}{a+b+d}\right)}+\frac{1}{\left(\frac{1}{a+c+d}\right)}+\frac{1}{\left(\frac{1}{b+c+d}\right)}}$$
$$\leq \frac{\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{a+b+d}+\frac{1}{a+c+d}+\frac{1}{b+c+d}}{4}.$$

Die linke Seite dieser Ungleichung vereinfachen wir zu $\frac{4}{3\cdot(a+b+c+d)}$. Somit gilt

$$\frac{16}{3}\cdot\frac{1}{a+b+c+d}\leq\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{a+b+d}+\frac{1}{a+c+d}+\frac{1}{b+c+d},$$

also $G \geq \frac{16}{3}$. Da wir oben schon gesehen haben, dass für $a=b=c=d=1$ die Ungleichung zur Gleichung $4\cdot\frac{1}{3}=\frac{16}{3}\cdot\frac{1}{4}$ wird, gilt sogar $G=\frac{16}{3}$. ❑

66. Internationale Mathematik-Olympiade

Die diesjährige Internationale Mathematik-Olympiade fand vom 10. bis 20. Juli 2025 in Sunshine Coast (Australien) statt. Mit 69 teilnehmenden Schülerinnen und 555 Schülern wurde ein neuer Rekord aufgestellt (bisher 621, 60. IMO in Bath, Vereinigtes Königreich). Sie kamen aus 110 Ländern (bisheriger Rekord 112 Länder zur 64. IMO in Chiba, Japan, und zur 60. IMO).

Insgesamt wurden 67 Gold-, 103 Silber- und 145 Bronzemedaillen vergeben, somit erhielten 315 Teilnehmende (50.5%) einen Preis. Mit zwei Silber- und vier Bronzemedaillen schnitten die deutschen Teilnehmer wieder erfolgreich ab. Sie konnten mit insgesamt 157 Punkten von 252 möglichen Punkten (62.3%) in der (inoffiziellen, auf der Punktsumme der sechs Mannschaftsmitglieder basierenden) Länderwertung den **29. Platz** erreichen (2023: 156/20. Platz; 2024: 120 Punkte/31. Platz). Angeführt wird diese Länderliste vom Vorjahreszweiten, der Volksrepublik China (231 Punkte, sechs Goldmedaillen), gefolgt von den USA (216 Punkte, fünf Gold- und eine Silbermedaillen) und der Republik Korea (203 Punkte, vier Gold- und zwei Silbermedaillen). Von den europäischen Ländern erreichten nur die Mannschaften aus Polen (196 Punkte/4. Platz), Türkei (186/10), Rumänien (181/13), Ungarn (180/14) und aus dem Vereinigten Königreich (178/16) mehr als 175 Punkte. Vor Deutschland lagen noch weiterer fünf europäische Länder[9].

[9] Vielfältige Informationen sind unter http://www.imo-official.org/ zu finden!

Aufgaben der 66. IMO

Hinweis: Die Arbeitszeit betrug zweimal 4 Stunden und 30 Minuten. Für jede Aufgabe waren 7 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1. Eine Gerade in der Ebene heiße *sonnig*, falls sie weder zur x-Achse noch zur y-Achse noch zur Geraden $x + y = 0$ parallel ist.

Gegeben sei eine ganze Zahl $n \geq 3$ Man bestimme alle nichtnegativen ganzen Zahlen k, sodass es n paarweise verschiedene Geraden in der Ebene gibt, welche die folgenden beiden Bedingungen erfüllen:

- Für alle positiven ganzen Zahlen a und b mit $a + b \leq n + 1$ liegt der Punkt (a, b) auf mindestens einer der Geraden.
- Genau k der n Geraden sind sonnig.

Aufgabe 2. Es seien Ω und Γ Kreise mit den Mittelpunkten M beziehungsweise N, wobei der Radius von Ω kleiner ist als der Radius von Γ. Die Kreise Ω und Γ schneiden einander in verschiedenen Punkten A und B. Die Gerade MN schneide Ω in C und Γ in D, wobei die Punkte C, M, N und D in dieser Reihenfolge auf der Geraden liegen. Der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ΔACD sei P. Die Gerade AP schneide Ω in einem weiteren Punkt $E \neq A$. Die Gerade AP schneide Γ in einem weiteren Punkt $F \neq A$. Der Höhenschnittpunkt des Dreiecks PMN sei H.

Man beweise, dass die durch H verlaufende Parallele zu AP eine Tangente an den Umkreis des Dreiecks ΔBEF ist.

Aufgabe 3. Die Menge der positiven ganzen Zahlen sei mit $\mathbb{N}$ bezeichnet. Eine Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ heiße *bonzig*, falls für alle positiven ganzen Zahlen a und b der Funktionswert $f(a)$ ein Teiler von $b^a - f(b)^{f(a)}$ ist.

Man bestimme die kleinste reelle Konstante c, für die $f(n) \leq cn$ für alle bonzigen Funktionen f und alle positiven ganzen Zahlen n gilt.

Aufgabe 4. Ein *strenger Teiler* einer positiven ganzen Zahl N ist ein von N verschiedener positiver Teiler von N.

Die unendliche Folge $a_1, a_2, \ldots$ besteht aus positiven ganzen Zahlen, von denen jede mindestens drei strenge Teiler besitzt. Für jedes $n \geq 1$ ist a_{n+1} die Summe der drei größten strengen Teiler von a_n.

Man bestimme alle möglichen Werte von a_1.

Aufgabe 5. Alice und Bazza spielen das *Inekoalaty-Spiel*. Dabei handelt es sich um ein Spiel für zwei Personen, dessen Regeln von einer positiven reellen Zahl λ abhängen, die beiden Spielern bekannt ist. Beginnend mit $n = 1$ geschieht im n-ten Zug des Spiels Folgendes:

• Ist n ungerade, dann wählt Alice eine nichtnegative reelle Zahl x_n mit

$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq \lambda n.$

• Ist n gerade, dann wählt Bazza eine nichtnegative reelle Zahl x_n mit

$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq n$

Kann ein Spieler keine passende Zahl x_n wählen, endet das Spiel und der andere Spieler gewinnt. Geht das Spiel unendlich lange, gewinnt keiner der Spieler. Beide Spieler kennen alle gewählten Zahlen.

Man bestimme alle Werte von λ, für die Alice eine Gewinnstrategie besitzt, und alle Werte, für die Bazza eine Gewinnstrategie besitzt.

Aufgabe 6. Gegeben sei ein aus Einheitsquadraten bestehendes (2025×2025)-Spielbrett. Matilda möchte rechteckige Kacheln, die unterschiedliche Größen haben können, derart auf das Spielbrett legen, dass der Rand jeder Kachel entlang der Ränder von Einheitsquadraten verläuft und jedes Einheitsquadrat von höchstens einer Kachel überdeckt wird.

Man bestimme die kleinstmögliche Anzahl von Kacheln, die Matilda so auf dem Spielbrett platzieren kann, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte genau ein Einheitsquadrat von keiner der Kacheln überdeckt ist.

Hinweise: Sicherlich ist der Schwierigkeitsgrad sehr hoch, so dass für die Klassenstufen 9/10 im Allgemeinen keine vollständigen Lösungen erwartet werden. Dennoch können wir uns mit diesen Aufgaben beschäftigen, zum Beispiel wie folgt.

zu Aufgabe 1: (mit einem Punktedurchschnitt von 5.2 Punkten über alle Teilnehmer/deutsches Team 7.0 Punkte und insgesamt 368-mal volle Punktzahl gehörte diese Aufgabe zu den leichteren Problemen) Man untersuche die Fälle $n = 3$ und $n = 4$.

zu Aufgabe 2: (durchschnittlich 3.3 Punkte alle Teilnehmer/3.8 Punkte deutsches Team) Man fertige eine geeignete Zeichnung an, um die Aufgabenstellung zu visualisieren.

zu Aufgabe 3: (mit einem Punktedurchschnitt von 1.6 Punkten über alle Teilnehmer/deutsches Team 2.3 Punkte und insgesamt 418-mal 0 Punkte eine schwierige Aufgabe) Man finde bonzige Funktionen.

zu Aufgabe 4: (durchschnittlich 5.1 Punkte alle Teilnehmer/6.8 Punkte deutsches Team und insgesamt 342-mal volle Punktzahl gehörte diese Aufgabe auch zu den leichteren Problemen) Man finde drei geeignete Anfangswerte.

zu Aufgabe 5: (durchschnittlich 3.0 Punkte alle Teilnehmer/6.2 Punkte deutsches Team) Man spiele für ausgewählte Werte von λ das Spiel.

zu Aufgabe 6: (mit einem Punktedurchschnitt von 0.2 Punkten über alle Teilnehmer/deutsches Team 0.0 Punkte und insgesamt 569-mal 0 Punkte die „Knalleraufgabe“). Man untersuche das Spiel für kleine Spielfeldgrößen.

Bekannte Sätze der Mathematik: Mittelungleichungen

Satz. Für alle positiven reellen Zahlen a und b gelten die Ungleichungen vom harmonischen, geometrischen, arithmetischen und quadratischen Mittel:

$$\min(a,b) \leq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \max(a,b)$$

(1) Beweis der Ungleichung vom geometrischen und arithmetischen Mittel. Für alle reellen Zahlen gilt $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$. Addieren wir auf beiden Seiten den Term $4ab$ und dividieren wir beide Seiten durch 4, so finden wir

$$ab \leq \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{(a+b)^2}{4}$$

woraus durch Radizieren (das wegen $a > 0$ und $b > 0$ erlaubt ist) die behauptete Ungleichung unmittelbar folgt.

(2) Beweis der Ungleichung vom harmonischen und geometrischen Mittel. Für zwei positive reelle Zahlen a und b betrachten wir ihre Reziproken $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{b}$, die selbst wieder positive reelle Zahlen sind. Für diese Reziproken kann folglich die unter (1) bewiesene Ungleichung angewandt werden und es gilt:

$$\sqrt{\frac{1}{a \cdot b}} \leq \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}$$

Bilden wir von beiden Seiten wiederum die Reziproken (unter Beachtung der Umkehrung des Relationszeichens), so folgt die behauptete Ungleichung.

(3) Beweis der Ungleichung vom arithmetischen und quadratischen Mittel. Aus der für reellen Zahlen a und b gültigen Ungleichung $(a-b)^2 \geq 0$ folgt durch Ausmultiplizieren und einfaches Umformen

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leq 2a^2 + 2b^2$$

Dividieren wir beide Seiten durch 4 und radizieren, so erhalten wir die behauptete Ungleichung.

(4) Gilt $a \leq b$, also $\frac{a}{b} \leq 1$, so finden wir aus $2 \geq 1 + \frac{a}{b} = a \cdot \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ die linke äußere

Abschätzung $a = \min(a, b) \leq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$. Zudem folgt aus $b^2 \geq \frac{a^2+b^2}{2}$ die rechte äußere Abschätzung $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \max(a, b) = b$.

Folgerung. Die Ungleichungskette zwischen den Mitteln kann auf endlich viele positive reelle Zahlen $a_1,\ a_2, \dots, a_n\ (n\ >\ 1)$ verallgemeinert werden:

$$\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}} \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n} \leq \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}{n}}.$$

Für den Beweis nutzen wir folgenden

Hilfssatz. Für positive reelle Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_n$ mit $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n$ gilt stets

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \leq 1$$

Beweis mittels der Methode der vollständigen Induktion[10].

(1) Induktions-Anfang: Für $n = 1$ gilt laut Voraussetzung $x_1 = 1$ und damit $x_1 \leq 1$

(2) Induktions-Schritt

Ind.-Voraussetzung: Es gelte für ein n:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n \quad \Rightarrow \quad x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \leq 1$$

Ind.-Behauptung: Es ist zu zeigen, dass dann gilt:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} = n + 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n+1} \leq 1$$

Ind.-Beweis: O.B.d.A. sortieren wir die Folge mit $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1}$. Dann ist $x_1 \leq 1$ und $x_{n+1} \geq 1$.

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} = n + 1 \\ \Rightarrow \quad & x_2 + x_3 + \cdots + x_n + (x_1 + x_{n+1} - 1) = n \\ \Rightarrow \quad & x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot (x_1 + x_{n+1} - 1) \leq 1 \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$(x_{n+1} - 1)(x_1 - 1) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq x_{n+1}x_1 \leq x_{n+1} + x_1 - 1$$

Insgesamt folgt also:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot x_{n+1} \leq x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot (x_1 + x_{n+1} - 1) \leq 1$$

(3) Induktions-Schluss: Nach dem Induktionsprinzip gilt somit die behauptete Gleichung für alle $n > 0$. ❑

Für den Beweis der verallgemeinerten Mittelungleichung setzen wir nun

[10] In den Wettbewerben der Mathematik-Olympiade wird die korrekte Anwendung der Methode der vollständigen Induktion in Klassenstufen 9/10 nicht erwartet.

$$c = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \quad ; \quad x_i = \frac{a_i}{c} \quad (i = 1, \dots, n),$$

dann gilt $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{c} = n$.
Daraus folgt wegen

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}{c^n} \leq 1$$

also

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq c = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

unmittelbar die Behauptung der Folgerung. Die Beweise zu (2) und (3) lassen sich nun auf *n* reelle Zahlen übertragen:

(2‘) Aus

$$\sqrt[n]{\frac{1}{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}} \leq \frac{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n}$$

folgt nach Übergang zu den Reziproken auf beiden Seiten mit Umkehrung des Relationszeichen die verallgemeinerte Ungleichung zwischen dem harmonischen und geometrischen Mittel.

(3‘) Wegen $(x_i - x_j)^2 \geq 0$ mit $1 \leq i, j \leq n$ folgt $2x_i x_j \leq x_1^2 + x_2^2$. Damit finden wir

$$\begin{aligned} &(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 + 2(x_1 x_2 + \cdots + x_{n-1} x_n) \\ &\leq x_1^2 + \cdots + x_n^2 + (n-1) \cdot (x_1^2 + \cdots + x_n^2) = n \cdot (x_1^2 + \cdots + x_n^2) \end{aligned}$$

Teilen wir beide Seiten durch n^2 und ziehen wir die Quadratwurzel, so erhalten wir die verallgemeinerte Ungleichung zwischen dem arithmetischen und quadratischen Mittel.

Den Beweis der verallgemeinerten Mittelungleichung können wir auch ohne diesen Hilfssatz führen, indem wir zunächst die Variablenanzahl in jedem Schritt verdoppeln (anstatt um eine Variable zu erhöhen, „Vorwärts“-Induktionsschritt). Dazu betrachten wir die positiven reellen Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_n$ und $y_1, y_2, \dots, y_n$. Gilt sowohl

$$x_{geom} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} = x_{arithm} \text{ und}$$
$$y_{geom} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} y_k} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k}{n} = y_{arithm},$$

so können wir die Mittelungleichung für die Mittelwerte anwenden:

$$\sqrt{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \cdot \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} y_k}} = \sqrt{x_{geom} \cdot y_{geom}} \leq \frac{x_{arithm} + y_{arithm}}{2} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} y_k}{2n},$$

also gilt die Mittelungleichung auch für $2 \cdot n$ Variablen. Nun gehen wir schrittweise zurück ("Rückwärts"-Induktionsschritt):

Es sei n keine Zweierpotenz mit $n < 2^k$. Wir setzen $a = \frac{x_1+\dots+x_n}{n}$ und (mit $m = 2^k$) definieren wir weitere Variablen $x_{n+1} = \dots = x_m = a$. Nun gilt bereits $\sqrt[m]{\prod_{k=1}^m x_k} \leq \frac{\sum_{k=1}^m x_k}{m}$. Wir formen weiter um:

$$a = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = \frac{\frac{m}{n} \cdot (x_1 + \dots + x_n)}{m} = \frac{x_1 + \dots + x_n + (m-n) \cdot a}{m}$$

Für $(m-n) \cdot a$ können wir nun aber $x_{n+1} + \dots + x_m$ einsetzen und haben somit eine Zweierpotenz als Anzahl der Variablen. Deshalb gilt

$$a \geq \sqrt[m]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot a^{m-n}}$$

Nach Potenzieren finden wir

$$a^m \geq x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot a^{m-n}, \text{ also } a^n \geq x_1 \cdot \ldots \cdot x_n,$$

womit die verallgemeinerte Mittelungleichung für n Variablen bewiesen ist. ❑

Monatsaufgabe 08/2025[11]

Finde alle natürlichen Quadratzahlen, für die jede Permutation ihrer Ziffern wieder eine Quadratzahl ergibt!

Termine

19. Mitteleuropäische Mathematik-Olympiade (MeMO), 25. bis 30. August 2025 in Chemnitz (www.memo2025.de), unter der Schirmherrschaft von Bundespräsident Frank-Walter Steinmeier.

Darunter:

- „Come together" mit den MeMO-Teilnehmenden für alle Freunde und Förderer der Mathematik, Beginn 16:00 Uhr.
- Öffentliche Abschlussveranstaltung mit Preisverleihung, Beginn 19:00 Uhr.

Jeweils im Fraunhofer-Institut für Werkzeugmaschinen und Umformtechnik IWU, Reichenhainer Str. 88, 09126 Chemnitz (Anmeldung an memo2025sl@gmx.de erbeten).

65. Mathematik-Olympiade, Runde 1, zum Schuljahresbeginn (August/September 2025) https://www.mathematik-olympiaden.de/moev/index.php/aufgaben

[11] Lösungseinsendungen an bino@hrz.tu-chemnitz.de sind bis 30.09.2025 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

Spotlight Mathe – Einblicke in en Bundeswettbewerb Mathematik (online-Seminar), 17. September 2025, 17:30 bis 18:30 Uhr, Veranstalter: Bildung & Begabung gGmbH Bonn. Anmeldung: https://secure.bildung-und-begabung.de/bwmw/?event=10210

Spotlight Mathe – Einblicke in die Mathematik-Olympiade (online-Seminar), 18. September 2025, 17:30 bis 18:30 Uhr, Veranstalter: Bildung & Begabung gGmbH Bonn. Anmeldung: https://secure.bildung-und-begabung.de/bwmw/?event=10211

Inhaltsverzeichnis

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2025/26)

Ausgabe[12]	Nr.	Thema	Aufgabe
08/2025	Thema 33	Zyklische Aufgabenformulierungen	MO640946 MO641046
08/2025	Thema 31.3	Lösungsstrategien im Koordinatensystem	MO641043
08/2025	Thema 25.3	Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	MO640942 MO641042

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[12] Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (bino@hrz.tu-chemnitz.de) oder unter https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben erhältlich.