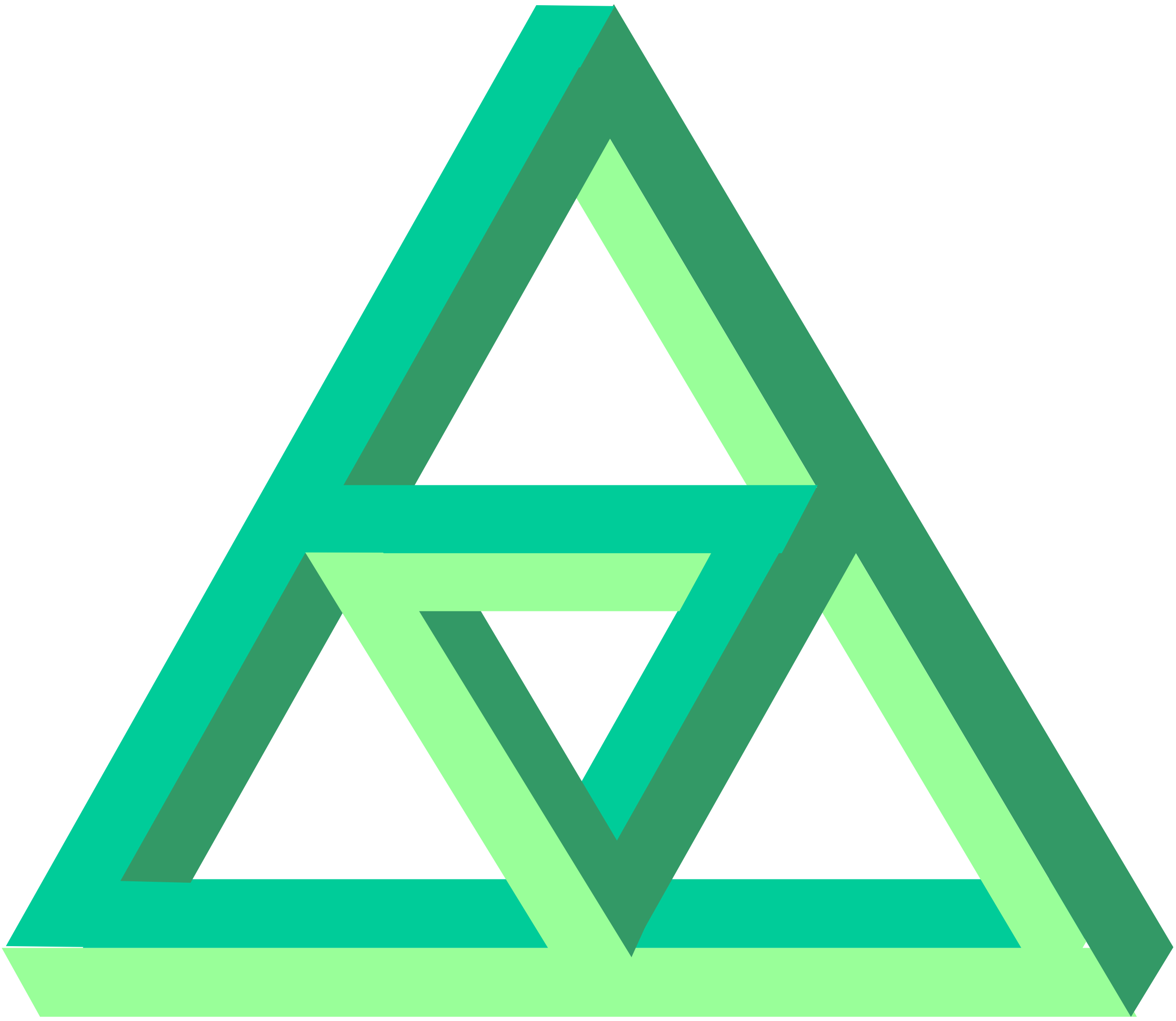
# Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 05/2025 (Mai 2025) 24. Jahrgang

## Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Wir setzen die Diskussion zum Thema „Koordinatensysteme“ fort. Auch in der Landesrunde der diesjährigen Mathematik-Olympiade wurden mit **MO640332/ MO641032** entsprechende Aufgaben gestellt. In der Olympiadeklasse 9 gab es am zweiten Tag sogar eine weitere Aufgabe **MO640935**, die sich mit Lösungsstrategien im Koordinatensystem vorteilhaft bearbeiten ließ. Zudem finden wir in der Lösungshinweisen der MO-Aufgabenkommission zu dieser Aufgabe eine lesenswerte Diskussion über geeignete Auswahlen der Lage des Quadrates im Koordinatensystem – woraus sich verschiedene Übungen ableiten lassen.

Mit den Aufgaben **MO640936/MO641036** knüpfen wir an das Thema 9 über Summen von Quadratzahlen an. Kern der Untersuchungen zu den Summen von zwei bzw. vier Quadratzahlen besteht in den Resten bei Division durch 3 bzw. 8, womit die Anzahlen der möglichen Lösungen drastisch reduziert werden können. Interessant sind aber auch die Lösungsansätze, mit denen die Anzahlen rekursiv auf kleine Zahlen n zurückgeführt werden können. Es zeigt sich einmal mehr, dass es bei solchen Aufgaben mit Jahreszahlen lohnenswert ist, zunächst systematisch einige spezielle Lösungen zu suchen.

Im historischen Rückblick zitieren wir eine Arbeit von 1908, in der der mathematische Weg zur Lösung der Frage „Wie viele Biquadrate sind höchstens für die Darstellung einer natürlichen Zahl als Summe von Biquadraten erforderlich?“ verfolgt werden kann – ohne aber schon die kleinste derartige Anzahl gefunden zu haben.

Wir berichten von der 14. EGMO, in der das deutschen Mädchen-Team besonders erfolgreich abgeschnitten hat.

[1] www.mathematik-olympiaden.de

[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

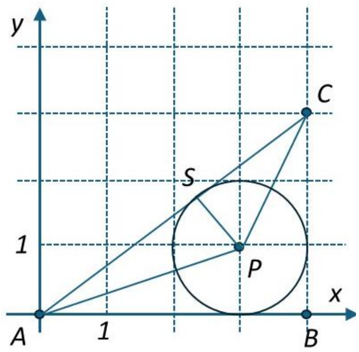
## Thema 31.3 – Lösungsstrategien im Koordinatensystem[3]

**Aufgabe 31.19 – MO640932.** In einem rechtwinkligen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0,0), B(4,0), C(4,3)$ und $P(3,1)$ gegeben.

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks $\Delta APC$.
b) Ermitteln Sie rechnerisch den Abstand des Punktes $P$ zur Geraden $AC$.
c) Das Dreieck $\Delta ABC$ besitzt einen Inkreis mit dem Radius $r$.
   Weisen Sie nach, dass $\frac{|\overline{AP}|}{|\overline{CP}|} = \frac{|\overline{BP}|}{r}$ gilt.

*Lösungshinweise zur Teilaufgabe a):* Im Dreieck $\Delta ABP$ ist die $x$-Koordinate von $B$ die Länge der Grundseite $\overline{AB}$ und die $y$-Koordinate von $P$ die Höhe auf dieser Grundseite. Es gilt also $A_{\Delta ABP} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 = 2$. Der Flächeninhalt des Dreiecks $\Delta APC$ ergibt sich als Differenz $A_{\Delta APC} = A_{\Delta ABC} - A_{\Delta ABP} - A_{\Delta BCP}$.

Für die Dreiecke $\Delta ABC$ und $\Delta BCP$ lassen sich ebenfalls die Längen der Grundseiten $\overline{AB}$ bzw. $\overline{BC}$ sowie die Höhenlängen auf diesen Grundseiten aus den Koordinaten der entsprechenden Punkte ablesen. Es gilt




$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$$

und

$$A_{\Delta BCP} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 = \frac{3}{2}.$$

Daraus ergibt sich $A_{\Delta APC} = 6 - 2 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$ .

*Lösungshinweise zur Teilaufgabe b):* Das Dreieck $\Delta APC$ hat die Seitenlänge $|\overline{AC}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ und (gemäß Teilaufgabe a) den Flächeninhalt 2,5. Damit hat die Höhe zur Grundseite $\overline{AC}$ in diesem Teildreieck die Länge 1. Das ist aber gerade der gesuchte Abstand von $P$ zu $AC$.

*Hinweis:* Wenn auch rechnerisch aufwendiger, so sollte zur Übung der Abstand aus den Geradengleichungen ermittelt werden: Die Punkte $A$ und $C$ liegen auf der Geraden $y = \frac{4}{3}x$. Eine dazu senkrechte Gerade hat den Anstieg $m = -\frac{3}{4}$. Somit finden wir für die Geradengleichung einer zu $AC$ senkrechten Geraden durch den Punkt $P$ die Darstellung $y = -\frac{3}{4} \cdot (x - 3) + 1 = -\frac{3}{4} \cdot x + \frac{13}{4}$.

Wir ermitteln den Schnittpunkt $S(x_S, y_S)$ beider Geraden aus der Gleichheit

$$\frac{4}{3}x_S = -\frac{3}{4} \cdot x_S + \frac{13}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{16+9}{12} \cdot x_S = \frac{13}{4} \quad \Rightarrow \quad x_S = \frac{39}{25}$$

---

[3] siehe auch Thema 31.1 in Heft 03/2025 und Thema 31.2 in Heft 04/2025

$$y_S = \frac{4}{3} \cdot \frac{39}{25} = \frac{52}{25}.$$

Damit beträgt der Abstand von $P$ zu $S$

$$|\overline{PS}| = \sqrt{\left(3 - \frac{39}{25}\right)^2 + \left(1 - \frac{52}{25}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{36}{25}\right)^2 + \left(\frac{27}{25}\right)^2} = \sqrt{\frac{1296}{2025} + \frac{729}{2025}} = 1$$

*Lösungshinweise zur Teilaufgabe c):* Die Abstände von $P$ zu $A, B$ bzw. $C$ sind nach der Abstandsformel aus den Koordinaten der Punkte gleich $|\overline{AP}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$, $|\overline{BP}| = \sqrt{(4-3)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$ bzw. $|\overline{CP}| = \sqrt{(4-3)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5}$ .

Der Punkt $P$ hat auch von den beiden anderen Dreiecksseiten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ jeweils den gleichen Abstand 1,

- weil die Gerade $AB$ auf der $x$-Achse liegt und deshalb deren Abstand zu $P$ der $y$-Koordinate des Punktes $P$ entspricht bzw.
- weil die Gerade $BC$ parallel zur $y$-Achse durch den Punkt $(4,1)$ verläuft und deshalb deren Abstand zu $P$ der Differenz der x-Koordinaten 4 – 3 = 1 entspricht.

Somit ist $P$ der Inkreismittelpunkt, und es gilt $r = 1$. Setzen wir die ermittelten Längen in die Verhältnisgleichung ein, können wir die Gleichheit bestätigen:

$$\frac{|\overline{AP}|}{|\overline{CP}|} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{|\overline{BP}|}{r} .$$

❑

*Anmerkung:* Da die Eckpunkte der zu untersuchenden Dreiecke ganzzahlige Koordinaten haben, kann deren Flächeninhalt $A$ auch nach dem Satz von PICK durch Abzählen ganzzahliger Gitterpunkte bestimmt werden. Es gilt

$$A = I + \frac{1}{2} \cdot R - 1 ,$$

wobei $I$ die Anzahl der Gitterpunkte im Inneren und $R$ die Anzahl der Gitterpunkte auf dem Rand des jeweiligen Dreiecks bezeichnet. Es ergibt sich auf diese Weise[4]

$$A_{\Delta APC} = 2 + \frac{1}{2} \cdot 3 - 1 = \frac{5}{2}.$$

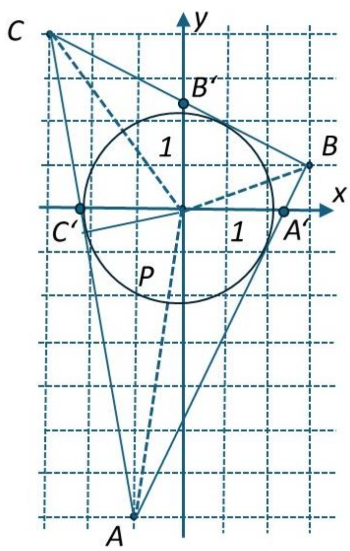
[4] Ein Abzählen der Punkte anhand einer Skizze wird im Allgemeinen ausreichend sein. Bei knapp erscheinenden Lagen sollte aber rechnerisch bestätigt werden, dass die gezählten Punkte auch tatsächlich im Innern oder auf dem Rand liegen.

Der Satz von PICK war Inhalt der **Aufgabe MO491036[5]:** Im Koordinatensystem bezeichnet man Punkte $(x\,;y)$ mit ganzzahligen Koordinaten $x$ und $y$ als Gitterpunkte. Weiter sei für $n \geq 3$ ein $n$-Eck gegeben, dessen sämtliche Eckpunkte Gitterpunkte sind. Es bezeichne $R$ die Anzahl der Gitterpunkte auf dem Rand des $n$-Ecks (die Eckpunkte eingeschlossen), $I$ die Anzahl der Gitterpunkte im Inneren des $n$-Ecks und $A$ seinen Flächeninhalt. Die Formel von PICK[6] besagt nun $A = I + \frac{R}{2} - 1$.

a) Es seien $x, y$ positive ganze Zahlen. Beweisen Sie die Formel von PICK für das Rechteck mit den Eckpunkten $(0;\ 0), (x;\ 0), (0;\ y)$ und $(x;\ y)$.
b) Beweisen Sie die Formel von PICK für rechtwinklige Dreiecke, deren Katheten parallel zu den Koordinatenachsen liegen.
c) Beweisen Sie die Formel von PICK für beliebige Dreiecke.

**Aufgabe 31.20 – MO641032** In einem rechtwinkligen Koordinatensystem sind die Punkte $A(-1,-7), B(3,1), C(-3,4)$ und $P(0,0)$ gegeben.

a) Berechnen Sie die Flächeninhalte der Dreiecke $\Delta ABP$, $\Delta BCP$ und $\Delta CAP$.
b) Ermitteln Sie rechnerisch den Abstand des Punktes $P$ zur Geraden $AC$.
c) Das Dreieck $\Delta ABC$ besitzt einen Inkreis mit dem Radius $r$.
   Weisen Sie nach, dass $\frac{|\overline{AP}|}{|\overline{CP}|} = \frac{|\overline{BP}|}{r}$ gilt.




*Lösungshinweise:* Wir ermitteln die Geradengleichungen, auf denen die Dreiecksseiten liegen:

$$f_{AB}(x) = y = \frac{1+7}{3+1} \cdot (x+1) - 7 = 2 \cdot x - 5$$
$$f_{BC}(x) = y = \frac{4-1}{-3-3} \cdot (x-3) + 1 = -\frac{1}{2} \cdot x + \frac{5}{2}$$
$$f_{AC}(x) = y = \frac{4+7}{-3+1} \cdot (x+1) - 7$$
$$= -\frac{11}{2} \cdot x - \frac{25}{2}$$

Wir ermitteln die Koordinaten des Punktes $A$‘ als Nullstelle der Funktion $f_{AB}$ und erhalten aus $0 = 2 \cdot x - 5$ die Koordinaten $A'\left(\frac{5}{2}, 0\right)$.
Wir ermitteln die Koordinaten des Punktes $B$‘ als Schnittpunkt der Funktion $f_{BC}$ mit der $y$-Achse und erhalten die Koordinaten $B'\left(0, \frac{5}{2}\right)$.
Wir ermitteln die Koordinaten des Punktes C‘ als Nullstelle der Funktion $f_{AC}$ und erhalten aus $0 = -\frac{11}{2} \cdot x - \frac{25}{2}$ die Koordinaten $C'\left(-\frac{25}{11}, 0\right)$.

[5] s. Heft mit Lösungshinweisen
[6] Erstmalig beschrieben vom österreichischen Mathematiker GEORG ALEXANDER PICK (1859 – 1942)

(Die Schnittpunkte können wir anhand der Skizze bestätigen. Würden wir dagegen die Schnittpunkte anhand der Skizze ablesen, sind die rechnerischen Proben erforderlich, um diese Koordinaten zu bestätigen.)

*Lösungshinweise zur Teilaufgabe a):* Wir bestimmen die Flächeninhalte als Summe von Flächeninhalten zweier geeigneter Dreiecke:

$$A_{\Delta ABP} = A_{\Delta AA'P} + A_{\Delta A'BP} = \frac{|\overline{A'P}|\cdot h_{A:A'P}}{2} + \frac{|\overline{A'P}|\cdot h_{B:A'P}}{2} = \frac{5\cdot 1}{2} + \frac{5\cdot 3}{2} = 10$$
$$A_{\Delta BCP} = A_{\Delta BB'P} + A_{\Delta B'CP} = \frac{|\overline{B'P}|\cdot h_{B:B'P}}{2} + \frac{|\overline{B'P}|\cdot h_{C:B'P}}{2} = \frac{\frac{5}{2}\cdot 3}{2} + \frac{\frac{5}{2}\cdot 3}{2} = \frac{15}{2}$$
$$A_{\Delta APC} = A_{\Delta APC'} + A_{\Delta PCC'} = \frac{|\overline{C'P}|\cdot h_{A:C'P}}{2} + \frac{|\overline{C'P}|\cdot h_{C:C'P}}{2} = \frac{\frac{25}{11}\cdot 7}{2} + \frac{\frac{25}{11}\cdot 4}{2} = \frac{25}{2}$$

*Lösungsvariante:* Elementargeometrisch ermitteln wir die Flächen, indem wir das jeweilige Dreieck in ein kleinstmögliches achsenparalleles Rechteck einschließen. Der Flächeninhalt des Dreiecks ergibt sich dann als Differenz des Flächeninhalts dieses Rechtecks und der Summe der Flächeninhalte mehrerer rechtwinkliger Dreiecke oder kleinerer Rechtecke. Dazu bezeichnen wir mit $R(a,b)$ den Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen $a$ und $b$ sowie mit $D(a,b)$ den Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Kathetenlängen $a$ und $b$. So finden wir:

$$A_{\Delta ABP} = R(4{,}8) - D(4{,}8) - D(3{,}1) - D(7{,}1) - R(1{,}1) = 4\cdot 8 - \frac{4\cdot 8}{2} - \frac{3\cdot 1}{2} - \frac{7\cdot 1}{2} = 10,$$
$$A_{\Delta BCP} = R(6{,}4) - D(3{,}1) - D(3{,}6) - D(3{,}4) = 6\cdot 4 - \frac{3\cdot 1}{2} - \frac{3\cdot 6}{2} - \frac{3\cdot 4}{2} = \frac{15}{2},$$
$$A_{\Delta APC} = R(3{,}11) - D(1{,}7) - D(3{,}4) - D(2{,}11) = 3\cdot 11 - \frac{1\cdot 7}{2} - \frac{3\cdot 4}{2} - \frac{2\cdot 11}{2} = \frac{25}{2}.$$

*Lösungsvariante:* Da die Eckpunkte der zu untersuchenden Dreiecke ganzzahlige Koordinaten haben, kann deren Flächeninhalt $A$ mit Hilfe des Satzes von PICK durch Abzählen ganzzahliger Gitterpunkte bestimmt werden.

Es gilt $A = I + \frac{1}{2}\cdot R - 1$, wobei $I$ die Anzahl der Gitterpunkte im Inneren und $R$ die Anzahl der Gitterpunkte auf dem Rand des jeweiligen Dreiecks bezeichnet. Für die Flächeninhalte erhalten wir so:

$$A_{\Delta ABP} = 8 + \frac{1}{2}\cdot 6 - 1 = 10\,,$$
$$A_{\Delta BCP} = 6 + \frac{1}{2}\cdot 5 - 1 = \frac{15}{2}\,,$$
$$A_{\Delta CAP} = 12 + \frac{1}{2}\cdot 3 - 1 = \frac{25}{2}\,.$$

*Lösungshinweise zur Teilaufgabe b):* Aufgrund der Geradengleichung $f_{AC}(x) = y = -\frac{11}{2}\cdot x - \frac{25}{2}$ hat die dazu senkrecht stehende Gerade den Anstieg $m = \frac{2}{11}$, so dass wir den geforderten Abstand aus dem Schnittpunkt $S(x_s, y_s)$ von $f_{AC}$

und der Geraden $y = \frac{2}{11} \cdot x$ berechnen können. Aus $-\frac{11}{2} \cdot x_S - \frac{25}{2} = \frac{2}{11} \cdot x_S$ folgt $\frac{4+121}{22} \cdot x_S = -\frac{25}{2}$, also $x_S = -\frac{11}{5}$ und deshalb $y_S = -\frac{2}{11} \cdot \frac{11}{5} = -\frac{2}{5}$. Daraus berechnen wir den Abstand $|\overline{SP}| = \sqrt{\left(\frac{11}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{121+4}{25}} = \sqrt{5}$.

*Lösungsvariante:* Das Dreieck $\Delta CAP$ hat die Seitenlänge $|\overline{AC}| = \sqrt{2^2 + 11^2} = 5\sqrt{5}$ und nach Aufgabe a) den Flächeninhalt $\frac{25}{2}$. Damit hat die Höhe zur Grundseite $\overline{AC}$ in diesem Teildreieck die Länge $h_{AC} = \sqrt{5}$. Das ist gerade der Abstand von $P$ zu $AC$.

*Lösungshinweise zur Teilaufgabe c):* Wir berechnen zunächst aus den Koordinaten der Dreieckspunkte die Längen der Dreiecksseiten:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(3+1)^2 + (1+7)^2} = 4 \cdot \sqrt{5}\,,$$
$$|\overline{BC}| = \sqrt{(-3-3)^2 + (4-1)^2} = 3 \cdot \sqrt{5}\,,$$
$$]\overline{AC}[ = \sqrt{(-3+1)^2 + (4+7)^2} = 5 \cdot \sqrt{5}$$

Nun können wir mittels der Flächenformel für allgemeine Dreiecke aus den (in Teilaufgabe a) berechneten) Flächeninhalten die Höhen von $P$ auf den Dreiecksseiten ermitteln:

$$h_{AB} = \frac{2 \cdot A_{\Delta ABP}}{|\overline{AP}|} = \frac{2 \cdot 10}{4 \cdot \sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}\,,$$
$$h_{BC} = \frac{2 \cdot A_{\Delta BCP}}{|\overline{BC}|} = \frac{2 \cdot \frac{15}{2}}{3 \cdot \sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}\,,$$
$$h_{AC} = \frac{2 \cdot A_{\Delta APC}}{|\overline{AC}|} = \frac{2 \cdot \frac{25}{2}}{5 \cdot \sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}\,.$$

Der Punkt P hat also von den drei Dreiecksseiten jeweils den gleichen Abstand $\sqrt{5}$ und ist somit der Inkreismittelpunkt. Es gilt also $r = \sqrt{5}$.

Alternativ können wir $r$ aus der Formel $A_{\Delta ABC} = r \cdot s$ bestimmt werden, wobei s der halbe Umfang des Dreiecks $\Delta ABC$ ist:

$$A_{\Delta ABC} = A_{\Delta ABP} + A_{\Delta BCP} + A_{\Delta APC} = 10 + \frac{15}{2} + \frac{25}{2} = 30\,.$$
$$s = \frac{1}{2} \cdot (|\overline{AB}| + |\overline{BC}| + |\overline{AC}|) = \frac{4 \cdot \sqrt{5} + 3 \cdot \sqrt{5} + 5 \cdot \sqrt{5}}{2} = 6 \cdot \sqrt{5}\,.$$

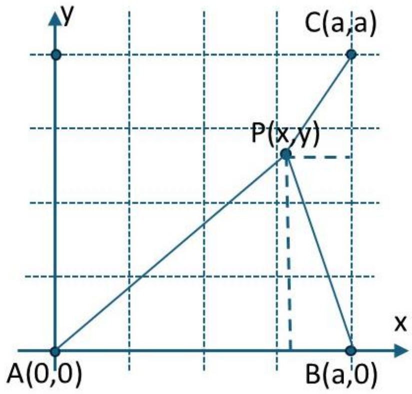
Daraus erhalten wir $r = \frac{30}{6 \cdot \sqrt{5}} = \sqrt{5}$. Um die geforderte Verhältnisgleichung nachzuweisen, berechnen wir abschließend die Abstände von $P$ zu den Dreieckspunkten:

$$|\overline{AP}| = \sqrt{1^2 + 7^2} = 5 \cdot \sqrt{2}\,,$$
$$|\overline{BP}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}\,,$$
$$|\overline{CP}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5\,.$$

Wir setzen die ermittelten Werte in die Verhältnisgleichung ein:

$$\frac{|\overline{AP}|}{|\overline{CP}|} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{5} = \sqrt{2} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \frac{|\overline{BP}|}{r}$$

**Aufgabe 31.21 – MO640935.** Ein Punkt $P$ habe zu den Eckpunkten eines Quadrats $ABCD$ die Abstände $|\overline{PA}| = 17$, $|\overline{PB}| = 11$ und $|\overline{PC}| = 5$.




Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Quadrats. Sollte dieser Flächeninhalt durch die Angaben nicht eindeutig bestimmt sein, so sind alle möglichen Antworten anzugeben.

*Hinweis:* Aufgrund der rechten Winkel in der Grundfigur (hier Quadrat) und der gegebenen Abstände von Punkten kann ein Lösungsansatz im Koordinatensystem erfolgreich sein, da sich Abstände leicht berechnen lassen (Euklidischer Abstand zwei Punkte). Insbesondere ersparen wir uns Fallunterscheidungen bzgl. der Lage des Punktes $P$ zum Quadrat, die bei der Analyse von Teildreiecken ggf. berücksichtigt werden muss.

*Lösungshinweise:* In naheliegender Weise legen wir das Quadrat $ABCD$ achsenparallel in ein Koordinatensystem mit den Punkten $A(0{,}0)$ und $B(a, 0)$. Dann ist die Seitenlänge des Quadrates $a$ und der Flächeninhalt $F = a^2$. Außerdem finden wir unmittelbar die Koordinaten der anderen zwei Eckpunkte: $C(a, a)$ und $D(0, a)$. Für den Punkt $P$ wählen wir die Koordinaten $P(x, y)$. Mithilfe der gegebenen Abstände erhalten wir folgende drei Gleichungen:

$$(1) \qquad |\overline{PA}|^2 = x^2 + y^2 = 17^2$$
$$(2) \qquad |\overline{PB}|^2 = (a - x)^2 + y^2 = 11^2$$
$$(3) \qquad |\overline{PC}|^2 = (a - x)^2 + (a - y)^2 = 5^2$$

Wir stellen die Gleichung (2) nach $x$ um und verwenden dabei die Gleichung (1).

$$a^2 - 2ax + \underbrace{x^2 + y^2}_{=289} = 121 \quad \Longrightarrow \quad (2') \qquad x = \frac{168 + a^2}{2a}$$

Nun stellen wir die Gleichung (3) nach $y$ um und verwenden dabei die Gleichungen (1) und (2‘):

$$2a^2 \underbrace{-2ax}_{-168-a^2} + \underbrace{x^2+y^2}_{=289} - 2ay = 25 \quad \Rightarrow \quad (3') \quad y = \frac{96+a^2}{2a}$$

Schließlich setzen wir (2‘) und (3‘) in die Gleichung (1) ein und erhalten:

$$(168+a^2)^2 + (96+a^2)^2 = 4 \cdot a^2 \cdot 289$$
$$2 \cdot a^4 + (2 \cdot 168 + 2 \cdot 96 - 1156) \cdot a^2 + 168^2 + 96^2 = 0$$
$$a^4 - 628 \cdot a^2 + 18720 = 0$$

Mit Hilfe der bekannten Lösungsformel für quadratische Gleichungen finden wir für $F = a^2$

$$F_{1,2} = 157 \pm \sqrt{157^2 - 18720} = 157 \pm \sqrt{5929} = 157 \pm 77$$

Somit gibt es zwei Lösungen, $F = 80$ und $F = 234$, die die gegebenen Bedingungen erfüllen. ❑

*Ergänzung:* Mit $F = 80$ erhalten wir $a = \sqrt{80} = 4 \cdot \sqrt{5} \approx 8.94$ und damit $x = \frac{168+80}{8 \cdot \sqrt{5}} = \frac{31}{5} \cdot \sqrt{5} \approx 13.86$ bzw. $y = \frac{96+80}{8 \cdot \sqrt{5}} = \frac{22}{5} \cdot \sqrt{5} \approx 9.84$. Der Punkt $P$ liegt folglich rechts der Seite $\overline{BC}$ und oberhalb der Seite $\overline{CD}$.

Mit $F = 234$ erhalten wir $a = \sqrt{234} = 3 \cdot \sqrt{26} \approx 15.30$ und damit $x = \frac{168+234}{6 \cdot \sqrt{26}} = \frac{67}{26} \cdot \sqrt{26} \approx 8.17$ bzw. $y = \frac{96+234}{6 \cdot \sqrt{26}} = \frac{55}{26} \cdot \sqrt{26} \approx 10.79$. Der Punkt $P$ liegt folglich im Inneren des Quadrates $ABCD$.

*Lösungsvariante:* In des Lösungshinweisen der Aufgabenkommission wird ausführlich die geschickte Wahl des Koordinatensystems diskutier. So basiert dort eine Lösungsidee auf der achsenparallelen symmetrischen Lage des Quadrates $ABCD$ zum Koordinatenursprung. Für einen geeigneten positiven Wert für $q$ sind dabei die Koordinaten der Eckpunkte $A(-q,-q), B(-q,q), C(q,q), D(-q,q)$ sowie $P(x,y)$. Auch hier entsteht aus den gegebenen Abständen ein (nichtlineares) Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten, dass zu der quadratischen Gleichung in $F$ wie oben führt. Man löse zur Übung die Aufgabe mit diesem Ansatz!

*Lösungsvariante:* Für einen prinzipiell anderen Lösungsansatz (nämlich ohne ein achsenparallel festgelegtes Quadrat) legen wir ein Quadrat $ABCD$ mit dem Flächeninhalt $F$ so in ein kartesisches Koordinatensystem, dass $B$ die Koordinaten (0, 0) und $P$ die Koordinaten $(b, 0)$ erhält, wodurch $|\overline{PB}| = b$ gilt. Die Koordinaten von $A$ bezeichnen wir mit $(a_x, a_y)$. Das Lot von $A$ auf die $x$-Achse schneide diese in $X(a_x, 0)$. Aufgrund des EUKLIDischen Abstandes der Punkte $A$ und $B$ ist die Bedingung für den Flächeninhalt des Quadrats $ABCD$ durch $F = a_x^2 + a_y^2$ gegeben. Weil der

Funktionsgraph durch $A$ und $B$ den Anstieg $\frac{a_y}{a_x}$ hat, liegt der Eckpunkt $C$ des Quadrates auf dem Funktionsgraph mit der Gleichung $y = -\frac{a_x}{a_y} \cdot x$. Setzen wir die Koordinaten für C als $C(a_y, -a_x)$ fest, so liegt $C$ wegen $-a_x = -\frac{a_x}{a_y} \cdot a_y$ auf dem Graph durch $B$ und $C$ und es ist die Gleichheit der Seitenlängen im Quadrat $ABCD$ wegen $|\overline{AB}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{a_y^2 + (-a_x)^2} = |\overline{BC}|$ erfüllt. Das Lot von $C$ auf die $x$-Achse schneide diese in $Y(a_y, 0)$.

Die Bedingung $|\overline{PA}| = a$ ist äquivalent zu $(b - a_x)^2 + a_y^2 = a^2$ (EUKLIDischer Abstand der Punkte $A(a_x, a_y)$ und $P(b, 0)$), also $b^2 - 2 \cdot b \cdot a_x + a_x^2 + a_y^2 = a^2$ und wegen $F = a_x^2 + a_y^2$ auch äquivalent zu $x = \frac{b^2+F-a^2}{2b}$. Mit ähnlicher Argumentation ist $|\overline{PC}| = c$ äquivalent zu $y = \frac{b^2+F-c^2}{2c}$.

Damit finden wir für die Quadratfläche die folgende Berechnungsformel

$$\left(\frac{b^2 + F - a^2}{2b}\right)^2 + \left(\frac{b^2 + F - c^2}{2b}\right)^2 = F$$

Wir setzen die gegebenen Zahlenwerte ein und erhalten die in $F$ quadratische Gleichung

$$(F - 168)^2 + (F + 96)^2 = 22^2 \cdot F$$

also

$$2 \cdot F^2 - 2 \cdot (168 - 96 + 242) + 168^2 + 96^2 = 0$$
$$F^2 - 314 \cdot F + 18720 = 0$$

Wir erhalten aus der bekannten Lösungsformel für quadratische Gleichungen

$$F_{1,2} = 157 \pm \sqrt{5929} = 157 \pm 77.$$

Es sind also zwei verschiedene Lösungen mit $F_1 = 80$ und $F_2 = 234$ gefunden. ❑

## Thema 9.4 – Summen von Quadratzahlen[7]

**Aufgabe 9.21 – MO640936.** Für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ sei mit $A(n)$ die Anzahl der nichtnegativen ganzzahligen Lösungen $(x, y)$ der Gleichung $x^2 + y^2 = 2 \cdot 3^n$ bezeichnet.

a) Bestimmen Sie $A(1)$ und $A(2)$.
b) Bestimmen Sie weiterhin $A(2025)$ und $A(2026)$.

[7] siehe Thema 9.1 in Heft 09/2021, Thema 9.2 in Heft 11/2022 und Thema 9.3 in Heft 04/2024

*Hinweise:* Die nichtnegativen ganzen Zahlen sind die Zahlen 0, 1, 2, 3, … Die verschiedenen Paare (6, 4) und (4, 6) sind beide keine Lösungen für $n = 3$, weil $6^2 + 4^2 = 4^2 + 6^2 = 52 \neq 2 \cdot 3^3 = 54$ gilt.

*Lösungshinweise:* Sei $(x, y)$ eine nichtnegative ganzzahlige Lösung der Gleichung $x^2 + y^2 = 2 \cdot 3^n$. Aus Symmetriegründen können wir zunächst $x \geq y$ annehmen. Daraus ergeben sich alle anderen Lösungen durch Vertauschen von $x$ und $y$. Wegen $x^2 \leq x^2 + y^2 = 2 \cdot 3^n \leq 2 \cdot x^2$ muss $3^n \leq x^2 \leq 2 \cdot 3^n$ für eine Lösung der geforderten Gleichung mit $x \geq y$ gelten.

*Lösungshinweise zur Teilaufgabe a):*
Wir untersuchen $n = 1$: Für eine Lösung der Gleichung mit $x \geq y$ muss $3 \leq x^2 \leq 6$ und somit $x = 2$ gelten. Da aber $6 - 2^2 = 2$ keine Quadratzahl ist, führt dies zu keiner Lösung. Wir erhalten somit $A(1) = 0$.

Es sei nun $n = 2$: Für eine Lösung der Gleichung mit $x \geq y$ muss $9 \leq x^2 \leq 18$, also $x = 3$ oder $x = 4$ gelten. Für $x = 3$ ist (3, 3) wegen $3^2 + 3^2 = 18 = 2 \cdot 3^2$ eine Lösung. Für $x = 4$ erhalten wir für $y^2 = 2 \cdot 3^2 - 4^2 = 18 - 16 = 2$ keine Quadratzahl, also keine weitere Lösung. Insgesamt gilt damit $A(2) = 1$.

*Lösungshinweise zur Teilaufgabe b):* Um eine Gesetzmäßigkeit für $A(n)$ zu finden, untersuchen wir weitere Fälle mit kleinen $n$.

Für $n = 3$ muss mit obiger Argumentation $3^3 = 27 \leq x^2 \leq 2 \cdot 3^3 = 54$ gelten, was nur für $x = 6$ oder 7 erfüllbar ist. Allerdings ist weder $2 \cdot 3^3 - 6^2 = 54 - 36 = 18$ noch $2 \cdot 3^3 - 7^2 = 54 - 49 = 5$ eine Quadratzahl. Wir finden also $A(3) = 0$. Damit liegt bereits die Vermutung nahe, es gilt $A(n) = 0$ für ungerade Zahlen $n$.

Sei also $n = 2 \cdot m + 1$. Dann können wir die Gleichung als $x^2 + y^2 = 6 \cdot z^2$ mit $z = 3^m$ schreiben. Da Quadratzahlen bei Division durch 3 nur die Reste 0 oder 1 lassen, ist die Summe zweier Quadratzahlen nur dann durch 3 teilbar, wenn beide Summanden durch 3 teilbar sind. Dann sind aber auch $x$ und $y$ beide durch 3 teilbar. Somit lässt sich auf der linken Seite der Primfaktor 3 in gerader Potenz ausklammern, während auf der rechten Seite der Primfaktor 3 in ungerader Potenz vorkommt. Es kann also keine Lösung geben und wir erhalten tatsächlich $A(n) = 0$ für ungerade Zahlen $n$.

Wir untersuchen $n = 4$: Mit der obigen Argumentation erhalten wir die Abschätzung $3^4 = 81 \leq x^2 \leq 2 \cdot 3^4 = 162$, was nur für $x =$ 9, 10, 11 oder 12 erfüllbar sein kann. Wir prüfen jeweils die Eignung für eine Lösung:

- $2 \cdot 3^4 - 9^2 = 162 - 81 = 81$, d.h. $y = 9$.
- $2 \cdot 3^4 - 10^2 = 162 - 100 = 62$, d.h. keine Quadratzahl.
- $2 \cdot 3^4 - 11^2 = 162 - 121 = 41$, d.h. keine Quadratzahl.
- $2 \cdot 3^4 - 12^2 = 162 - 144 = 18$, d.h. keine Quadratzahl.

Es gilt also $A(4) = 1$ und wir vermuten $A(n) = 1$ für alle geraden Zahlen $n$. Es sei also $n = 2 \cdot m$. Dann können wir die Gleichung als $x^2 + y^2 = 2 \cdot z^2$ mit $z = 3^m$ schreiben. Offenbar ist $x = y = 3^m$ eine Lösung der Gleichung. Wir untersuchen nun die Lösbarkeit für $x \neq y$. Da Quadratzahlen bei Division durch 3 nur die Reste 0 oder 1 lassen, ist die Summe zweier Quadratzahlen nur dann durch 3 teilbar, wenn beide Summanden durch 3 teilbar sind. Dann sind aber auch $x$ und $y$ beide durch 3 teilbar. Somit enthalten $x^2$ den Primfaktor $2k_x$-mal und $y^2$ den Primfaktor $2k_y$-mal, wobei eine dieser Anzahlen kleiner als $2 \cdot m$ sein muss. Somit gibt es auf der linken Seite der Gleichung $2 \cdot min\{k_x, k_y\} < 2 \cdot m$ den Primfaktor 3. Es kann also keine weitere Lösung geben und wir finden tatsächlich $A(n) = 1$ für gerades $n$.

Damit haben wir $A(2025) = 0$ und $A(2026) = 1$ bewiesen. ❑

**Aufgabe 9.22 – MO641036.** Für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ sei mit $A(n)$ die Anzahl der nichtnegativen ganzzahligen Lösungen $(w, x, y, z)$ der Gleichung $w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 3 \cdot 2^n$ bezeichnet.

a) Bestimmen Sie $A(0)$ und $A(1)$.
b) Bestimmen Sie weiterhin $A(2025)$ und $A(2026)$.

*Hinweise:* Die nichtnegativen ganzen Zahlen sind die Zahlen 0, 1, 2, 3, … Die verschiedenen Tupel (0, 1, 2, 0) und (1, 0, 2, 0) sind beide keine Lösungen für $n = 0$, weil $0^2 + 1^2 + 2^2 + 0^2 = 1^2 + 0^2 + 2^2 + 0^2 = 5 \neq 3 \cdot 2^0 = 3$ gilt.

*Lösungshinweise:* Sei $(w, x, y, z)$ eine nichtnegative ganzzahlige Lösung der Gleichung $w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 3 \cdot 2^n$. Aus Symmetriegründen können wir zunächst $w \geq x \geq y \geq z$ annehmen. Daraus ergeben sich alle anderen Lösungen durch Vertauschen von $w, x, y$ und $z$. Wegen $w^2 \leq w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 3 \cdot 2^n \leq 4 \cdot w^2$ muss $\frac{3}{4} \cdot 2^n \leq w^2 \leq 3 \cdot 2^n$ für eine Lösung der geforderten Gleichung mit $w \geq x \geq y \geq z$ gelten.

*Lösungshinweise zur Teilaufgabe a):* Wir untersuchen $n = 0$. Für eine Lösung der Gleichung mit $w \geq x \geq y \geq z$ muss $\frac{3}{4} \leq w^2 \leq 3$ gelten, was nur durch $w = 1$ erfüllbar ist. Somit ist (1, 1, 1, 0) offensichtlich eine Lösung. Aus dieser Lösung erhalten wir durch Vertauschen genau vier verschiedene Lösungen, womit $A(0) = 4$ gilt.

Es sei nun $n = 1$. Für eine Lösung der Gleichung mit $w \geq x \geq y \geq z$ muss $\frac{3}{2} \leq w^2 \leq 6$ gelten, was nur durch $w = 2$ erfüllbar ist. Es ergibt sich (2, 1, 1, 0) als Lösung der Gleichung, woraus sich $A(1) = 4 \cdot 3 = 12$ berechnet, da die Zahl 2 auf alle vier Variablen und die Zahl 0 auf die verbleibenden 3 Variablen verteilt werden können.

*Lösungshinweise zur Teilaufgabe b):* Zunächst betrachten wir den Fall $n = 2$. Für eine Lösung der Gleichung mit $w \geq x \geq y \geq z$ muss $3 \leq w^2 \leq 12$ gelten, was nur durch $w = 2$ oder $w = 3$ erfüllbar ist. Es ergeben sich (2, 2, 2, 0) und (3, 1, 1, 1) als Lösungen, woraus sich $A(2) = 4 + 4 = 8$ berechnet.

Wir untersuchen nun $n \geq 3$. Für die Gleichung schreiben wir

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 3 \cdot 2^n = 3 \cdot 8 \cdot 2^{n-3}$$

Offenbar ist die rechte Seite für $n \geq 3$ stets durch 8 teilbar. Wir betrachten deshalb die Reste, die Quadratzahlen bei Division durch 8 lassen[8]:

- Das Quadrat einer geraden Zahl lässt bei Division durch 8 den Rest 0 oder 4.
- Das Quadrat einer ungeraden Zahl lässt bei Division durch 8 stets den Rest 1.

Für eine durch 8 teilbare (und damit geradzahlige) Summe $w^2 + x^2 + y^2 + z^2$ bedarf es einer geraden Anzahl ungerader Summanden.

- Sind alle vier Zahlen $w, x, y$ und $z$ ungerade, so lässt die Summe ihrer Quadratzahlen bei Division durch 8 den Rest 4. Es kann also in diesem Fall keine Lösung für $n \geq 3$ geben.
- Sind genau zwei der Zahlen $w, x, y, z$ ungerade, so lässt die Summe ihrer Quadratzahlen bei Division durch 8 entweder den Rest 2 oder den Rest 6. Es gibt damit auch in diesem Fall keine ganzzahligen Lösungen, für die $w^2 + x^2 + y^2 + z^2$ durch 8 teilbar ist.
- Sind alle vier Zahlen $w, x, y$ und $z$ gerade, so gibt es eine größte Zweierpotenz $2^k$, durch die alle vier Zahlen teilbar sind. Dann ist die Summe ihrer Quadratzahlen durch $2^{2 \cdot k}$ ohne Rest teilbar. Es gibt also Zahlen $w_0, x_0, y_0$ und $z_0$ (die nicht alle geradzahlig sind) mit der Eigenschaft (#) $w_0^2 + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 3 \cdot 2^{n-2 \cdot k}$.
  - Für $2 \cdot k = n$ ist (1, 1, 1, 0) eine Lösung für (#), die zur Lösung $(2^k, 2^k, 2^k, 0)$ mit $2^n + 2^n + 2^n = 3 \cdot 2^n$ führt, aus der wir durch Vertauschen 4 verschiedene Lösungen erhalten.
  - Für $2 \cdot k = n - 2$ ist (3, 1, 1, 1) eine Lösung für (#), die zur Lösung $(3 \cdot 2^{k-1}, 2^{k-1}, 2^{k-1}, 0)$ mit $9 \cdot 2^{n-2} + 3 \cdot 2^{n-2} = 12 \cdot 2^{n-2} = 3 \cdot 2^n$ führt, aus der wir durch Vertauschen 4 verschiedene Lösungen erhalten.
  - Für $2 \cdot k = n - 2 \cdot m$ mit einer Zahl $m > 1$ gibt es keine Lösung zu (#), da auf der rechten Seite der geforderten Gleichung der Faktor 8 vorkommt, aber die Summe der Quadratzahlen eines Tupels mit mindestens einer ungeraden Zahl kann nicht durch 8 teilbar sein.
  - **Für eine gerade Zahl $n$ gibt es folglich $A(n) = 4 + 4 = 8$ Lösungen.**

[8] s. Aufgabe 9.13

- Für $2 \cdot k = n - 1$ ist (2, 1, 1, 0) eine Lösung für (#), die zur Lösung $(2 \cdot 2^k, 2^k, 2^k, 0)$ mit $4 \cdot 2^{n-1} + 2 \cdot 2^{n-1} = 6 \cdot 2^{n-1} = 3 \cdot 2^n$ führt, aus der wir durch Vertauschen 12 verschiedene Lösungen erhalten.
- Für $2 \cdot k = n - 2 \cdot m - 1$ mit einer Zahl $m > 1$ gibt es keine Lösung zu (#), da auf der rechten Seite der geforderten Gleichung der Faktor 8 vorkommt, aber die Summe der Quadratzahlen eines Tupels mit mindestens einer ungeraden Zahl kann nicht durch 8 teilbar sein.
- **Für eine ungerade Zahl $n$ gibt es folglich $A(n) = 12$ Lösungen.**

Folglich erhalten wir $A(2025) = 12$ und $A(2026) = 8$. ❑

Aufgaben zur Untersuchung der Reste bei Division von Quadratzahlen waren in der MO schon frühzeitig vertreten.

**Aufgabe 9.23 – MO370921**. Beweisen Sie die folgende Aussage (a)!

a) Wenn eine Quadratzahl ungerade ist, dann lässt sie bei Division durch 8 den Rest 1.

Beweisen Sie auch die folgende Aussage (b)!

b) Wenn eine Quadratzahl ungerade, aber nicht durch 3 teilbar ist, dann lässt sie bei Division durch 24 den Rest 1.

*Lösungshinweise zur Teilaufgabe a):* Es sei $q$ eine Quadratzahl, d.h. das Quadrat $q = n^2$ einer natürlichen Zahl $n$. Wenn $q$ ungerade ist, ist auch $n$ ungerade (denn wäre $n$ gerade, so wäre auch $n^2 = q$ gerade). Also können wir $n = 2 \cdot k + 1$ mit geeigneter natürlicher Zahl $k$ schreiben. Daraus folgt:

$$q^2 = (2 \cdot k + 1)^2 = 4 \cdot k^2 + 4 \cdot k + 1 = 4 \cdot k \cdot (k + 1) + 1.$$

Da von den aufeinanderfolgenden Zahlen $k$ und $k + 1$ eine Zahl gerade ist, ist $\frac{k \cdot (k+1)}{2}$ eine ganze Zahl. Somit finden wir wie behauptet $q = 8 \cdot \frac{k \cdot (k+1)}{2} + 1$.

*Lösungshinweise zur Teilaufgabe b):* Es sei $q$ eine Quadratzahl der geforderten Art, dann gibt es eine Zahl $k$ mit $q = n^2 = (6 \cdot k \pm 1)^2$, da $n^2$ und damit auch $n$ weder durch 2 noch durch 3 teilbar ist. Multiplizieren wir das Quadrat aus, erhalten wir

$$q = 36 \cdot k^2 \pm 12 \cdot k + 1 = 12 \cdot k \cdot (3 \cdot k \pm 1) + 1$$

Das Produkt $k \cdot (3 \cdot k \pm 1)$ ist geradzahlig, denn entweder ist $k$ bereits gerade oder - falls $k$ ungerade ist- ist $3 \cdot k$ ungerade und somit $3 \cdot k \pm 1$ gerade. Damit finden wir wie behauptet $q = \underbrace{12 \cdot 2}_{=24} \cdot \frac{k \cdot (3 \cdot k \pm 1)}{2} + 1$. ❑

**Aufgabe 9.24 – MO400941/MO401021.**

a) Beweisen Sie: Für jede natürliche Zahl $a$ ist die Zahl $a^2$ entweder von der Form $4 \cdot k$ oder von der Form $8 \cdot k + 1$, wobei jeweils $k$ eine natürliche Zahl ist.
b) Gibt es eine $n$-stellige Quadartzahl mit $n > 1$, die aus lauter gleichen Ziffern besteht? Beweisen Sie Ihre Antwort.,

*Lösungshinweise zur Teilaufgabe a):* Für jede natürliche Zahl $a$ trifft einer der folgenden Fälle zu:

1. $a$ ist von der Form $a = 2 \cdot m$ mit einer natürlichen Zahl $m$. Dann gilt $a^2 = 4 \cdot m^2$, mit $k = m^2$ also $a^2 = 4 \cdot k$.
2. $a$ ist von der Form $a = 2 \cdot m + 1$ mit einer natürlichen Zahl $m$. Dann gilt $a^2 = 4 \cdot m^2 + 4 \cdot m + 1 = 4 \cdot m \cdot (m + 1) + 1$. Da eine der aufeinander-folgenden Zahlen $m$ und $m + 1$ geradzahlig sein muss, ist $k = \frac{m \cdot (m+1)}{2}$ eine ganze Zahl, also $a^2 = 8 \cdot k + 1$.

*Lösungshinweise zur Teilaufgabe b):* Ist $a^2$ eine Quadratzahl aus $n$ lauter gleichen Ziffern $x$, so gilt

$$a^2 = x \cdot (10^{n-1} + 10^{n-1} + \cdots + 10 + 1).$$

Offenbar ist $x \neq 0$, da 0 zu keiner mehrstelligen Quadratzahl führt. Da es keine zweistellige Quadratzahl aus zwei gleichen Ziffern gibt, muss $n > 2$ gelten. Deshalb können wir $a^2$ wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} a^2 &= x \cdot (100 \cdot (10^{n-3} + 10^{n-2} + \cdots + 10 + 1) + 11) \\ &= 4 \cdot x \cdot \big((25 \cdot (10^{n-3} + 10^{n-2} + \cdots + 10 + 1) + 3) - 1\big) = 4 \cdot m - x \end{aligned}$$

mit geeigneter ganzer Zahl $m$. Nach den Ergebnissen aus der Teilaufgabe a) untersuchen wir nun die zwei möglichen Fälle:

1. $a$ ist gerade und mit einer natürlichen Zahl $k$ gilt: $4 \cdot m - x = 4 \cdot k$. Dann ist $x$ durch 4 teilbar und kann deshalb nur 4 oder 8 sein. $x$ ist aber die Einerziffer der Quadratzahl einer geraden Zahl $a$ (auf 0, 2, 4, 6 oder 8 endend), so dass nur 0, 4, 6, 6, 4 möglich ist. Also müsste $x = 4$ sein. Dann wäre aber auch $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \underbrace{11 \ldots 1}_{n-mal}$ eine Quadratzahl. Dafür untersuchen wir den Fall
2. $a$ ist ungerade und mit einer natürlichen Zahl $k$ gilt: $4 \cdot m - x = 8 \cdot k + 1$. Wegen $x = 4(m - 2k) - 1$ kann $x$ nur 3 oder 7 sein. $x$ ist aber die Einerziffer der Quadratzahl einer ungeraden Zahl $a$ (auf 1, 3, 5, 7 oder 9 endend), so dass nur 1, 9, 5, 9, 1 möglich ist. Der Fall einer ungeraden Zahl $a$ ist also nicht möglich.

**Aufgabe 9.25 – MO050931.** Beweisen Sie die folgende Behauptung! Jede nicht durch 9 teilbare (ganzzahlige) Quadratzahl lässt bei Division durch 3 den Rest 1.

*Lösungshinweise:* Sei $n^2$ eine nicht durch 9 teilbare Quadratzahl. Dann ist $n$ nicht durch 3 teilbar (sonst wäre $n^2$ durch 9 teilbar). $n$ lässt bei Division durch 3 also den Rest 1 oder 2 und lässt sich daher schreiben als $n = 3 \cdot m + 1$ oder $n = 3 \cdot m + 2$ mit passend gewählter ganzzahliger Zahl $m$. Dann ist

$$n^2 = (3m + 1)^2 = 9m^2 + 6m + 1 = 3(3m^2 + 2m) + 1$$

oder

$$n^2 = (3m + 2)^2 = 9m^2 + 12m + 4 = 3(3m^2 + 4m + 1) + 1.$$

In beiden Fällen lässt $n^2$ bei Division durch 3 den Rest 1. ❑

**Aufgabe 9.26 – MO280931.** Man nennt drei von 0 verschiedene natürliche Zahlen $a, b, c$ genau dann ein pythagoreisches Zahlentripel, wenn sie die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen.

Beweisen Sie, dass in jedem pythagoreischen Zahlentripel mindestens eine der drei Zahlen durch 5 teilbar ist!

*Lösungshinweise:* Sind $a$ und $b$ nicht durch 5 teilbar, lassen sie aber wegen

$$(5k \pm 1)^2 = 25 \cdot k^2 \pm 10 \cdot k + 1$$
$$(5k \pm 2)^2 = 25 \cdot k^2 \pm 20 \cdot k + 4$$

beide die Reste 1 oder 4 bei der Division durch 5. Damit lässt $a^2 + b^2$ also einen der Reste 1 + 1 = 2, 1 + 4 = 4 + 1 = 5 (also 0) oder 4 + 4 = 8 (also 3) bei der Division durch 5. Da aber auch $c^2$ als Quadratzahl nur einen der Reste 0, 1 oder 4 bei der Division durch 5 lassen kann, fallen der erste und der letzte Fall für den Rest der Summe $a^2 + b^2$ weg und $a^2 + b^2 = c^2$ muss durch 5 teilbar sein. ❑

**Aufgabe 9.27 – MO630932.** Wie viele Tripel $(x, y, z)$ ganzer Zahlen gibt es, die das System von Ungleichungen

$$(x + y - z)^2 < 50$$
$$(y + z - x)^2 < 140$$
$$(z + x - y)^2 < 180$$

erfüllen?

*Lösungshinweise:* Sei $(x, y, z)$ eine Lösung des Ungleichungssystems in ganzen Zahlen. Setzen wir $a = y + z - x$, $b = z + x - y$ und $c = x + y - z$, so gilt $|a| \leq 11$, $|b| \leq 13$ und $|c| \leq 7$. Außerdem sind $a + b = 2 \cdot z$, $b + c = 2 \cdot x$ und $c + a = 2 \cdot y$ gerade ganze Zahlen, und daher haben $a, b$ und $c$ die gleiche Parität.

Sind umgekehrt drei ganze Zahlen $a, b, c$ gleicher Parität gegeben, für die $|a| \leq 11$, $|b| \leq 13$ und $|c| \leq 7$ gilt, so sind die Zahlen $x = \frac{1}{2} \cdot (b + c)$, $y = \frac{1}{2} \cdot (c + a)$, $z = \frac{1}{2} \cdot (a + b)$ ganz und erfüllen die Bedingung der Aufgabenstellung. Die gesuchte

Anzahl ist also gleich der Anzahl aller Tripel $(a, b, c)$ ganzer Zahlen gleicher Parität, für die $|a| \leq 11$, $|b| \leq 13$ und $|c| \leq 7$ gilt.

*Fall 1:* $a, b$ und $c$ sind ungerade. Für $a$ gibt es die 12 Möglichkeiten {±1, ±3, ±5, ±7, ±9, ±11}, für $b$ die 14 Möglichkeiten {±1, ±3, ±5, ±7, ±9, ±11, ±13} und für $c$ die 8 Möglichkeiten {±1, ±3, ±5, ±7}. Insgesamt gibt es also $12 \cdot 14 \cdot 8 = 1344$ solche Tripel.

*Fall 2:* $a, b$ und $c$ sind gerade. Für $a$ gibt es die 11 Möglichkeiten {0, ±2, ±4, ±6, ±8, ±10}, für $b$ die 13 Möglichkeiten {0, ±2, ±4, ±6, ±8, ±10, ±12} und für $c$ die 7 Möglichkeiten {0, ±2, ±4, ±6}. Insgesamt gibt es also $11 \cdot 13 \cdot 7 = 1001$ solche Tripel.

Zusammen macht das 1344 + 1001 = 2345 Lösungstripel. ❑

Ein Vergleich der Lösungsmengen über die möglichen Reste bei Quadratzahlen gelingt auch bei den aktuellen Aufgaben**.**

*Lösungsvariante zu MO640936:* Wir bezeichnen mit $G(n)$ die Gleichung der Form $x^2 + y^2 = 2 \cdot 3^n$ für $n \geq 2$. Es sei $(x_n, y_n)$ eine Lösung der Gleichung $G(n)$. Da Quadratzahlen bei Division durch 3 nur die Reste 0 oder 1 lassen, ist die Summe zweier Quadratzahlen nur dann durch 3 teilbar, wenn beide Summanden durch 3 teilbar sind. Dann sind aber auch $x$ und $y$ beide durch 3 teilbar und somit $x^2$ und $y^2$ durch 9 teilbar. Somit erhalten wir für $x_{n-2} = \frac{1}{3} \cdot x_n$ und $y_{n-2} = \frac{1}{3} \cdot y_n$ mit $x_{n-2}^2 + y_{n-2}^2 = \frac{1}{9} \cdot x_n^2 + \frac{1}{9} \cdot y_n^2 = \frac{2 \cdot 3^n}{9} = 2 \cdot 3^{n-2}$ ein Lösungspaar für die Gleichung $G(n-2)$. Umgekehrt existiert auch für jedes Lösungspaar $(x_{n-2}, y_{n-2})$ der Gleichung $G(n-2)$ mit $(x_n, y_n) = (3 \cdot x_{n-2}, 3 \cdot y_{n-2})$ ein Lösungspaar der Gleichung $G(n)$. Somit stimmen die Anzahlen der Lösungen der Gleichungen $G(n-2)$ und $G(n)$ für $n \geq 2$ überein.

Insbesondere gilt damit $A(2025) = A(1) = 0$ und $A(2026) = A(2) = 1$. ❑

*Lösungsvariante zu MO641036:* Wir bezeichnen mit $G(n)$ die Gleichung der Form $w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 3 \cdot 2^n$ für $n \geq 3$. Es sei $(w_n, x_n, y_n, z_n)$ eine Lösung der Gleichung $G(n)$. Da Quadratzahlen bei Division durch 8 nur die Reste 0, 4 oder 1 lassen, ist die Summe von vier Quadratzahlen nur dann durch 8 teilbar, wenn alle Summanden durch 2 teilbar sind. Dann sind aber auch $w, x, y$ und $z$ durch 2 teilbar und somit $w^2, x^2, y^2$ und $z^2$ durch 4 teilbar. Somit erhalten wir für $w_{n-2} = \frac{1}{2} \cdot w_n, x_{n-2} = \frac{1}{2} \cdot x_n, y_{n-2} = \frac{1}{2} \cdot y_n$ und $z_{n-2} = \frac{1}{2} \cdot z_n$ mit

$$w_{n-2}^2 + x_{n-2}^2 + y_{n-2}^2 + z_{n-2}^2 = \frac{1}{4} \cdot w_n^2 + \frac{1}{4} \cdot x_n^2 + \frac{1}{4} \cdot y_n^2 + \frac{1}{4} \cdot z_n^2 = \frac{3 \cdot 2^n}{4} = 4 \cdot 3^{n-2}$$

ein Lösungstupel für die Gleichung $G(n-2)$. Umgekehrt existiert auch für jedes Lösungstupel $(w_{n-2}, x_{n-2}, y_{n-2}, z_{n-2})$ der Gleichung $G(n-2)$ mit $(w_n, x_n, y_n, z_n) = (2 \cdot w_{n-2}, 2 \cdot x_{n-2}, 2 \cdot y_{n-2}, 2 \cdot z_{n-2})$ ein Lösungstupel der Gleichung $G(n)$. Somit stimmen die Anzahlen der Lösungen der Gleichungen $G(n-2)$ und $G(n)$ für $n \geq 2$ überein.

Insbesondere gilt damit $A(2025) = A(1) = 12$ und $A(2026) = A(2) = 8$. ❑

## 14. Europäische Mathematik-Olympiade für Mädchen

Vom 11. bis 17. April 2025 fand in Prishtina (Kosovo) die europäische Mathematik-Olympiade (European Girl's Mathematical Olympiad – EGMO) für junge Frauen statt. Obwohl die 1. EGMO in Cambridge (UK, 2012) als europäischer Wettbewerb ausgeschrieben war, nahmen bereits drei nicht-europäische Teams teil. In diesem Jahr stellten sich 56 Teams mit 219 Teilnehmerinnen dem Wettbewerb, darunter 135 aus 36 europäischen Ländern.

Die vier talentiertesten Nachwuchsmathematikerinnen aus den bundesweiten Mathematik-Wettbewerben nahmen als deutsche Delegation sehr erfolgreich teil – sie erreichten eine Gold-, zwei Silber- und eine Bronzemedaille. Insgesamt wurden 27 Mal Gold vergeben (12.3% aller Teilnehmerinnen, mindestens 27 Punkte), 38 Mal Silber (17.4%, mindestens 20 Punkte) und 53 Mal Bronze (24.2%, mindestens 15 Punkte) vergeben, so dass 118 der 219 Starterinnen (53.8%, darunter 71 von 135 Europäerinnen, 52.6%).

Die Ausrichtung der EGMO orientiert sich an der Internationalen Mathematik-Olympiade (IMO). Es werden zwei Klausuren (4½ Stunden) mit je drei Aufgaben geschrieben. Pro Aufgabe werden maximal sieben Punkte ergeben (gesamt 42 Punkte). Die deutschen Teilnehmerinnen qualifizierten sich über das Auswahlverfahren zu IMO. Die Teamstärke ist auf vier begrenzt.

Für die Länderwertung werden die erreichten Punktzahlen der vier Teilnehmerinnen addiert, so dass maximal 168 Punkte möglich sind. Mit 96 Punkten nahm Deutschland den 6. Platz ein. Angeführt wird die Länderliste von der Volksrepublik China (134 Punkte, 3 Gold-, 1 Silbermedaille), den USA (123 Punkte, 4 Goldmedaillen) und Australien (115 Punkte, 3 Gold-, 1 Silbermedaille). Die nächsten Plätze belegten Italien und Polen, so dass Deutschland den dritten Platz unter den europäischen Ländern schaffte – das bisher beste Ergebnis eines deutschen Teams!

Die 15. EGMO wird im April 2026 in Bordeaux (Frankreich) stattfinden.

## Aufgaben der 14. EGMO

*Hinweis* zur Einschätzung des Schwierigkeitsgrades der Aufgaben: Jedes Team aus vier Teilnehmerinnen konnte pro Aufgabe 28 Punkte erreichen.

| Durchschnittlich erreichte Punktzahl pro Team | Gesamt | Top Ten | Deutschland |
|---|---|---|---|
| Aufgabe 1 | 21.8 | 27.0 | 28.0 |
| Aufgabe 2 | 8.0 | 19.9 | 21.0 |
| Aufgabe 3 | 2.5 | 9.3 | 7.0 |
| Aufgabe 4 | 19.1 | 25.7 | 16.0 |
| Aufgabe 5 | 9.5 | 18.2 | 20.0 |
| Aufgabe 6 | 1.2 | 4.7 | 4.0 |

**Aufgabe 1.** Für eine positive ganze Zahl $N$ seien $c_1 < c_2 < \cdots < c_m$ alle positiven ganzen Zahlen kleiner als $N$, die teilerfremd zu $N$ sind. Bestimme alle $N \geq 3$, sodass $ggT(N, c_i + c_{i+1}) \neq 1$ für alle $1 \leq i \leq m-1$.

*Hier sei $ggT(a,b)$ die größte positive ganze Zahl, die sowohl $a$ als auch $b$ teilt. Zahlen $a$ und $b$ sind teilerfremd, falls $ggT(a,b) = 1$.*

**Aufgabe 2.** Eine unendliche, aufsteigende Folge $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ positiver ganzer Zahlen heiße *zentral*, wenn für jede positive ganze Zahl $n$ das arithmetische Mittel der ersten $a_n$ Folgenglieder gleich $a_n$ ist.

Zeige, dass es eine unendliche Folge $b_1, b_2, b_3, \ldots$ positiver ganzer Zahlen gibt, sodass für jede zentrale Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ unendlich viele positive ganze Zahlen $n$ mit $a_n = b_n$ existieren.

**Aufgabe 3.** Sei $\Delta ABC$ ein spitzwinkliges Dreieck. Die Punkte $B, D, E$ und $C$ liegen in dieser Reihenfolge auf einer Geraden, sodass $BD = DE = EC$ gilt. Seien $M$ beziehungsweise $N$ die Mittelpunkte der Strecke $\overline{AD}$ beziehungsweise $\overline{AE}$. Angenommen das Dreieck $\Delta ADE$ ist spitzwinklig. Sei $H$ der Höhenschnittpunkt des Dreiecks $\Delta ADE$. Seien $P$ und $Q$ Punkte auf den Geraden $BM$ beziehungsweise $CN$, sodass $D, H, M$, und $P$ auf einem Kreis liegen und paarweise verschieden sind, beziehungsweise sodass $E, H, N$, und $Q$ auf einem Kreis liegen und paarweise verschieden sind.

Zeige, dass $P, Q, N$ und $M$ auf einem Kreis liegen.

**Aufgabe 4.** Sei $\Delta ABC$ ein spitzwinkliges Dreieck mit $AB \neq AC$ und Inkreismittelpunkt $I$. Die Geraden $BI$ und $CI$ schneiden den Umkreis von $\Delta ABC$ in $P \neq B$ beziehungsweise $Q \neq C$. Seien die Punkte $R$ und $S$ so gewählt, dass $AQRB$ und $ACSP$ Parallelogramme sind (mit $AQ \parallel RB, AB \parallel QR, AC \parallel SP$ und $AP \parallel CS$). Sei $T$ der Schnittpunkt der Geraden $RB$ und $SC$.

Zeige, dass die Punkte $R, S, T$ und $I$ auf einem Kreis liegen.

**Aufgabe 5.** Sei $n > 1$ eine ganze Zahl. In einer *Konfiguration* eines $n \times n$ −Bretts enthält jedes der $n^2$ Felder einen Pfeil, der entweder nach oben, unten, links oder rechts zeigt. Für eine gegebene Start-Konfiguration startet die Schnecke Turbo in einem der Felder des Bretts und bewegt sich von Feld zu Feld. In jedem Schritt bewegt sich Turbo in die Richtung des Pfeils, auf dem sie steht, genau ein Feld weit (wobei sie möglicherweise das Brett verlässt). Nach jedem Schritt drehen sich die Pfeile in allen Feldern um 90° gegen den Uhrzeigersinn. Wir nennen ein Feld *gut*, wenn Turbo auf diesem Feld beginnend jedes Feld genau einmal besucht und dann auf ihrem Startfeld endet, ohne dabei das Brett zu verlassen.

Bestimme in Abhängigkeit von $n$ die maximale Anzahl guter Felder unter allen möglichen Start-Konfigurationen.

**Aufgabe 6.** In jedem Feld eines 20252025Bretts steht eine nicht-negative reelle Zahl, sodass die Summe der Zahlen in jeder Reihe gleich 1 ist und die Summe der Zahlen in jeder Spalte gleich 1 ist.

Sei $r_i$ die größte Zahl in Reihe $i$, und sei $R = r_1 + r_2 + \cdots + r_{2025}$. Analog sei $c_i$ die größte Zahl in Spalte $i$ und sei $C = c_1 + c_2 + \cdots + c_{2025}$.

Was ist der größtmögliche Wert von $\frac{R}{C}$?

## In alten Mathe-Büchern geblättert.

Der Vier-Quadrate-Satz (auch Satz von LAGRANGE) besagt, dass jede natürliche Zahl als ***Summe von vier Quadraten*** geschrieben werden kann[9]. Diese Aussage wurde schon 1621 von CLAUDE GASPARD BACHET DE MÉZIRIAC (1581 – 1638) vermutet und 1770 von JOSEPH-LOUIS DE LAGRANGE (1736 – 1813) bewiesen. Jede positive ganze Zahl lässt sich als ***Summe von höchstens neun ganzen Kubikzahlen*** darstellen[10]. Diese Aussage wurde erstmals 1770 von EDWARD WARING (1736 – 1798) vermutet und 1912 von ARTHUR JOSEF ALWIN WIEFERICH (1884 – 1954) bewiesen. Bereits 1909 hat DAVID HILBERT (1862 – 1943) das allgemeine WARINGsche Problem bewiesen, dass nämlich zu jedem natürlichen Exponenten $k$ eine natürliche Zahl $g(k)$ existiert, dass jede Zahl $n$ als Summe von höchstens $g(k)$ $k$-ten Potenzen dargestellt werden kann. Dabei sind die kleinsten Zahlen $g(k)$ gesucht. Auf dem schwierigen Weg zum Minimum im Fall $k = 4$ ist folgender Beitrag interessant.

MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

[9] Diese Aussage kann nicht verschärft werden, denn alle Zahlen der Form $4^a \cdot (8 \cdot b + 3)$ lassen sich nicht als Summe dreier Quadratzahlen darstellen.

[10] Auch diese Aussage kann nicht verschärft werden, denn für die Zahlen $29 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 8 + 8$ und $239 = 1 + 8 + 8 + 8 + 8 + 27 + 27 + 27 + 125$ sind neun Kubikzahlen erforderlich.

gegenwärtig herausgegeben von

Felix Klein in Göttingen | Walther v. Dyck in München | David Hilbert in Göttingen | Otto Blumenthal in Aachen

66. Band 1. Heft

LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B.G.TEUBNER
1908

Seite 105 ff.

# Über die Darstellung der Zahlen als Summen von Biquadraten

von

Arthur Wieferich in Münster i/W.

Anknüpfend an die Abhandlung des Herrn E. Landau „Über die Darstellung einer ganzen Zahl als Summe von Biquadraten in den „Rendiconti del Circolo Mathematico di Palermo“, Bd. 23 (1907), p. 91-96 soll im vorliegenden nachgewiesen werden, daß sich eine jede ganz Zahl als Summe von 37 Biquadraten darstellen lässt.
Liouville hat zuerst bewiesen, dass sich eine jede Zahl additiv in 53 Biquadrate zerlegen lässt. Diese Zahl wurde von Realis auf 47, von Lucas auf 45, resp. 41 und von Herrn Fleck auf 39 reduziert. Herr E. Landau hat sodann in der oben zitierten Arbeit die Zerlegbarkeit in 38 Biquadrate nachgewiesen.

1.

Herr Landau hat für jede der 48 Restklassen modulo 48 die geringste Anzahl der Zerlegung hinreichenden Biquadrate angegeben. Bezeichnet $B_i$ diese Zahl, so hat er gefunden, daß alle Restklassen mit Ausnahme von $48n + 11$, $48n + 27$, $48n + 43$ sich als Summe von höchstens 37 Biquadraten darstellen lassen. Er setzte diese nun folgendermaßen zusammen:

$$48n + 11 = (48n + 9) + 1^4 + 1^4$$
$$48n + 27 = (48n + 25) + 1^4 + 1^4$$
$$48n + 43 = (48(n - 1) + 9) + 1^4 + 3^4$$

und erhielt so, da er $48n + 9$ und $48n + 25$ gleich $B_{36}$ bestimmt hatte, eben die drei Klassen gleich $B_{38}$. Kann demnach gezeigt werden, daß sowohl $48n + 9$ wie $48n + 25$ gleich $B_{35}$ ist, so wäre beweisen, daß obige drei Klassen gleich $B_{37}$ sind, d.h. daß eine jede Zahl in 37 Biquadrate zerlegbar ist.

2.

Es sei zunächst

$$24N_i = 48n + 9 - (6\varepsilon_i + 3)^4 = 24\,[2n - 54\varepsilon_i^4 - 108\varepsilon_i^3 - 81\varepsilon_i^2 - 27\varepsilon_i - 3],$$

wo $\varepsilon_i$ der Reihe nach gleich 0, 1, …, 7 sein möge. Es ergeben sich dann leicht folgende Kongruenzen:

$$\begin{array}{lll} N_0 \equiv 2n + 13, & N_1 \equiv 2n + 15, & N_2 \equiv 2n + 3, \\ N_3 \equiv 2n + 9, & N_4 \equiv 2n + 1, & N_5 \equiv 2n + 11 \pmod{16} \\ N_6 \equiv 2n + 7, & N_7 \equiv 2n + 5, & \end{array}$$

aus denen sofort folgt, daß für eine der Zahlen $\varepsilon_i$ $N_i$ die Form $16n_1 + 13$ haben muss. Ich kann also stets $\varepsilon_i = 0, 1, \ldots, 7$ so bestimmen, daß

$$48n + 9 = (6\varepsilon_i + 3)^4 + 24(16n_1 + 13)$$

wird.

3.

Ebenso erhält man, falls man:

$$24N_i = 48n + 25 - (6\varepsilon_i + 3)^4 = 24[2n - 54\varepsilon_i^4 - 36\varepsilon_i^3 - 9\varepsilon_i^2 - \varepsilon_i + 1],$$

setzt, die Kongruenzen

$$\begin{array}{lll} N_0 \equiv 2n + 1, & N_1 \equiv 2n + 13, & N_{-1} \equiv 2n + 7, \\ N_2 \equiv 2n + 11, & N_{-2} \equiv 2n + 15, & N_{-3} \equiv 2n + 9, \pmod{16} \\ N_{-4} \equiv 2n + 5, & N_{-5} \equiv 2n + 3, & \end{array}$$

d.h. für eine der Zahlen $\varepsilon_i = 0, \pm 1, \pm 2, -3, -4, -5$ muss $N_i$ die Form $16n_1 + 13$ annehmen. Ich kann demnach durch geeignete Wahl von $\varepsilon_i$ bewirken, daß

$$48n + 25 = (6\varepsilon_i+1)^4 + 24(16n_1 + 13)$$

wird.

4.

Wie leicht zu verifizieren, kann nun eine Zahl $16n_1 + 13$ nur auf folgende Weise als Summe dreier Quadrate dargestellt werden:

$$16n_1 + 13 = (4x)^2 + (8y \pm 2)^2 + (8z \pm 3)^2.$$

Es wird also

$$24(16n_1 + 13) = 6(8x)^2 + 6 \cdot 2^4 \cdot (4y \pm 1)^2 + 24(8z \pm 3)^2.$$

Nun ist, wie Herr Landau zeigte: $6 \cdot 2^4 \cdot (4y \pm 1)^2 = B_{11}$. Ferner folgt aus der Identität:

$$24(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)^2 = 2(z_1 + z_2 + z_3)^4 + 2(-z_1 + z_2 + z_3)^4 + 2(z_1 - z_2 + z_3)^4 + 2(z_1 + z_2 - z_3)^4 + (2z_1)^4 + (2z_2)^4 + (2z_3)^4,$$

daß auch $24(8z \pm 3)^2 = B_{11}$ ist. Da bekanntlich $6m^2 = B_{12}$ ist, ergibt sich

$$24\,(16n_1 + 13) = B_{34}.$$

5.

Es ist also jede der Formen $48n + 9$ und $48n + 25$ gleich $B_{35}$ und demnach eine jede Zahl der Restklassen $48n + 11$, $48n + 27$, $48n + 43$ als Summe von 37 Biquadraten darstellbar, falls diese Zahl $> 45^4$ ist, da $45^4$ das größte von $48n + 9$ abzusondernde Biquadrat ist. Es lässt sich nun leicht zeigen, daß auch jede Zahl $< 45^4$ gleich $B_{37}$ ist. Subtrahiert man nämlich von einer Zahl $< 45^4$ das größte sie nicht übertreffende Biquadrat, so findet man, daß die Differenz $< 45^4 - 44^4 = 352\,529$ ist; ferner, daß ihr Übermaß über das größte sie nicht übertreffende Biquadrat $< 24^4 - 23^4 = 51\,935$ ist. Da nun, wie schon Herr Landau zeigte, jede Zahl $< 21^4$ gleich $B_{26}$ ist, ergibt sich leicht, daß jede Zahl $< 45^4$ gleich $B_{28}$, d.h. sicher gleich $B_{37}$ wird. Hiermit ist also allgemein bewiesen, daß alle Zahlen sich als Summen von 37 Biquadraten darstellen lassen. Sehr viel weitergehenden Reduzierungen dürften sich jedoch aus den bisher benutzten Identitäten kaum mehr ergeben.

*Hinweis:* Mit seinem letzten Satz irrte sich ARTHUR WEIFERING jedoch. Im Jahr 1986 veröffentlichten RAMACHANDRAN BALASUBRAMANIAN (geb. 1951), FRANÇOIS DRESS (geb. 1967) und JEAN-MARC DESHOUILLERS (geb. 1946) den Beweis für $g(4) = 19$.

## Monatsaufgabe 05/2025[11]

Auf einer Tafel stehen $n \geq 3$ positive ganze Zahlen. Ein Zug besteht darin, drei Zahlen $a, b, c$ auf der Tafel auszuwählen, die die drei Seitenlängen eines nicht-degenerierten (d.h. nicht-entarteten) und nicht-gleichseitigen Dreiecks sind, und diese durch $a + b - c$, $b + c - a$ und $c + a - b$ zu ersetzen.

Zeige, dass es keine unendliche Folge solcher Züge geben kann.

## Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 03/2025

**Aufgabe I-3** (Individualwettbewerb der 17. MeMO, 2023, Strečno, Slowakei).
Sei $\Delta ABC$ ein Dreieck mit Inkreismittelpunkt $I$. Der Inkreis $\omega$ von $\Delta ABC$ berühre die Seite $\overline{BC}$ im Punkt $D$. Wir bezeichnen mit $E$ und $F$ diejenigen Punkte, für die sowohl $AI \parallel BE \parallel CF$ als auch $|\sphericalangle BEI| = |\sphericalangle CFI| = 90°$ gelten. Die Geraden $DE$ und $DF$ schneiden $\omega$ jeweils ein weiteres Mal in den Punkten $E'$ bzw. $F'$.

Zeige, dass $E'F' \perp AI$.

*Lösungshinweise:* Wir bezeichnen mit $B'$ den Fußpunkt des Lotes von $I$ auf $AC$ und mit $C'$ den Fußpunkt des Lotes von $I$ auf $AB$. Betrachten wir das Viereck $DCB'I$, so ist dies wegen $|\sphericalangle CDI| + |\sphericalangle IB'C| = 90° + 90° = 180°$ ein Sehnenviereck. Deshalb liegen diese vier Punkte auf einem Kreis. Betrachten wir das Viereck $DCFI$, so ist dies wegen $|\sphericalangle CDI| + |\sphericalangle IFC| = 90° + 90° = 180°$ ebenfalls ein Sehnenviereck. Deshalb liegen auch diese vier Punkte auf einem Kreis. Da ein Kreis aber bereits durch drei Punkte (hier $D, C$ und $I$) festgelegt ist, liegen auch $C, F, B'$ und $D$ auf einem Kreis, den wir mit $K$ bezeichnen.

- Es gilt $|\sphericalangle F'IB'| = 2 \cdot |\sphericalangle F'DB'|$ (Zentriwinkel und Peripheriewinkel im Umkreis des Dreiecks $\Delta ABC$ über der Sehne $\overline{F'B'}$).
- Weiter gilt $\sphericalangle F'DB' = \sphericalangle FDB'$ (die Geraden durch $F'$ und $D$ sowie durch $F$ und $D$ fallen aufeinander).
- Außerdem finden wir $|\sphericalangle FDB'| = |\sphericalangle FCB'|$ (Peripheriewinkel im Kreis $K$ über der Sehne $\overline{FB'}$).
- Aufgrund der Parallelität von $AI$ und $CF$ gilt aber auch $|\sphericalangle FCB'| = |\sphericalangle IAC|$ (Wechselwinkel).

[11] Lösungseinsendungen an bino@hrz.tu-chemnitz.de sind bis 30.06.2025 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

- Schließlich erkennen wir noch $2 \cdot |\sphericalangle IAC| = |\sphericalangle BAC|$ (weil $AI$ die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle BAC$ ist).

Insgesamt folgt daraus $|\sphericalangle F'IB'| = |\sphericalangle BAC|$.

Laut Voraussetzungen ist $|\sphericalangle FIA| = 90°$, also ergibt sich

$$|\sphericalangle FIB'| = 90° - |\sphericalangle AIB'| = |\sphericalangle IAC| = \frac{1}{2} \cdot |\sphericalangle BAC|.$$

Zusammengefasst finden wir

$$|\sphericalangle F'IF| = |\sphericalangle F'IB'| - |\sphericalangle FIB'| = |\sphericalangle BAC| - \frac{1}{2} \cdot |\sphericalangle BAC| = \frac{1}{2} \cdot |\sphericalangle BAC|.$$

Mit ähnlicher Argumentation finden wir mit Hilfe des Punktes $C'$ die Gleichung $|\sphericalangle E'IE| = \frac{1}{2} \cdot |\sphericalangle BAC|$. Also ist die Gerade $EIF$ eine äußere Winkelhalbierende im Dreieck $\Delta E'IF'$. Da $AI \perp EF$ ist, ist die Gerade $AI$ eine innere Winkelhalbierende im Dreieck $\Delta E'IF'$. Aber das Dreieck $\Delta E'IF'$ ist gleichschenklig, also ist die Gerade $AI$ auch eine Höhe, also gilt wie behauptet $AI \perp E'F'$. ❑

## Termine

**Wettbewerb „Jugend forscht“, Bundeswettbewerb,** 29.05. bis 01.06.2025 an der Helmut-Schmidt-Universität/Universität der Bundeswehr Hamburg (https://www.jugend-forscht.de/wettbewerbe/bundeswettbewerb-2025.html)

**64. Mathematik-Olympiade, Bundesrunde,** 23. bis 26.05.2025, Universitätsstadt Göttingen ( https://mo2025.de)

## Inhaltsverzeichnis

## Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2024/25)

| **Ausgabe**[12] | **Nr.** | **Thema** | **Aufgabe** |
|---|---|---|---|
| 05/2025 (Mai) | Thema 31.3 | Lösungsstrategien im Koordinatensystem | MO641032<br>MO640935<br>MO640932 |
| 05/2025 (Mai) | Thema 9.4 | Summen von Quadraten | MO641036<br>MO640936 |
| 04/2025 (Apr.) | Thema 31.2 | Lösungsstrategien im Koordinatensystem | MO641013<br>MO611023 |
| 03/2025 (März) | Thema 31.1 | Lösungsstrategien im Koordinatensystem | MO640922<br>MO621033 |
| 03/2025 (März) | Thema 25.2 | Gleichungen/Ungleichungen mit Wurzelausdrücken | MO641024 |
| 02/2025 (Feb.) | Thema 29.2 | Schubfachprinzip | MO640924 |
| 02/2025 (Feb.) | Thema 24.3 | Kombinatorik | MO610935 |
| 01/2025 (Jan.) | Thema 24.2 | Kombinatorik | MO641023<br>MO640923 |
| 12/2024 (Dez.) | Thema 30 | Diophantische Gleichungen | MO641011 |
| 11/2024 (Nov.) | Thema 19.2 | Maximale Eigenschaften ebener Figuren | MO641012 |
| 11/2024 (Nov.) | Thema 03 | Gleichungssysteme | MO641015 |
| 11/2024 (Nov.) | Thema 22 | Zahlenverteilungen auf Figuren | MO641016 |
| 10/2024 (Okt.) | Thema 04.3 | Flächenberechnung | |
| 09/2024 (Sept.) | | Binomialkoeffizienten | MO631045 |
| | Thema 04.2 | Flächenberechnung | MO630946 |
| 08/2024 (Aug.) | Thema 29.1 | Schubfachprinzip | MO631041<br>MO630941<br>MO630934 |

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[12] Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (bino@hrz.tu-chemnitz.de) oder unter https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben erhältlich.